КЫРГЫЗ РЕСПУБЛИКАСЫНЫН
БИЛИМ БЕРҮҮ ЖАНА ИЛИМ МИНИСТРЛИГИ

Ж.О.Толубаев, А.М.Исмаилова

БИР АРГУМЕНТТҮҮ ФУНКЦИЯНЫН ИНТЕГРАЛДЫК ЭСЕПТӨӨЛӨРҮ БОЮНЧА ӨЗ АЛДЫНЧА ИШТЕРДИН ЖЫЙНАГЫ

(Өз алдынча иштерди аткарууга
усулдук көрсөтмөлөр)

СБОРНИК САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ РАБОТ ПО ИНТЕГРАЛНОМУ ИСЧИСЛЕНИЮ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

(Методическое руководство
к выполнению самостоятельных работ)

Бишкек 2014

УДК 98
ББК 77.1
Т 82

БатМУ СГЭИнин окуу усулдук кеңешмесинде талкууланып, басмага сунушталды.

Жооптуу редактору: Толбаев Б. – физика-математика илимдеринин кандидаты, профессор

Авторлор:
Ж.О.Толубаев, БатМУ СГЭИнин директорунун окуу жана илимий-изилдөө иштери боюнча орун басары,
А.М.Исмаилова, БатМУнун математика кафедрасынын башчысы, ага окутуучу

Ж.О.Толубаев, А.М.Исмаилова
Т 82 **Математика курсу боюнча өз алдынча иштердин жыйнагы,** - Б.: 2014.- 52 бет

ISBN 997-9998-66-422-1

Усулдук колдонмо жогорку окуу жайларынын күндүзгү жана дистанттык бөлүмдөрүндө билим алышкан студенттер үчүн математика боюнча өз алдынча иштөөсүнө сунушталат.

Методическое пособие предназначено для самостоятельной работы студентов ВУЗов по математике, обучающихся на дневной и дистанционных формах обучения.

УДК 98
Т 8804000000-55 ББК 77.1

ISBN 997-9998-66-422-1

К И Р И Ш   С Ө З

Азыркы күндө жогорку окуу жайлардын алдында окутуунун сапатын жогорулатуу жана дүйнөлүк деңгээлдеги жогорку билимдүү, квалификациялуу адис кадрларды даярдоо маселеси турат. Ал үчүн бүгүнкү күндө окутуу процессинде кредиттик системаны колдонуу негизги маселелерден болуп саналат. Кредиттик система боюнча окутуунун негизи болуп, окуу процессинде студенттердин өз алдынча иштөөсүн уюштуруу эсептелет. Өз алдынча иштин өзгөчөлүгү жекече иштөөгө, системалуулукка, үзгүлтүксүздүккө жана жөнөкөйдүн татаалга өтүү мүнөзгө ээ болууга тийиш. Өз алдынча иш окуу ишмердүүлүгүнүн бардык түрүн, студенттердин даярдыктарынын сапатын жана аудиториялык сабактын натыйжалуу өтүлүшүн камтыйт.

Кыргыз Республикасынын мамлекеттик билим берүүнүн стандартынын негизинде бакалавриаттык билим берүү бөлүмүндө, эң негизгиси ар бир адистиктин студенттеринин өз алдынча даярдануусуна окуу планынын 40%дан кем эмес сааты бөлүштүрүлгөн.

Математикадан студентердин өз алдынча иштөөсү үчүн алардын ар бирине тиешелүү мисал-маселерди түзүп чыгуу талап кылынат.

Сунуш кылынуучу усулдук колдонмо ушул милдеттерди чечүүгө жардам берет. Ал өз ичине математикалык анализдин интегралдык эсептөөлөр бөлүмдөрүн камтыйт. Студенттердин өз алдынча иштерин аткарууга жеңил болуусу үчүн колдонмодо негизги түшүнүктөр, формулалар жана ар бир бөлүмгө тиешелүү мисалдардын чыгарылыштары толугу менен берилди. Ал мисалдар жана көнүгүүлөр студенттердин жалпы теориялык билимдерин бекемдөөгө, математикалык маданиятын өстүрүүгө жана математикалык аппаратты ар кандай м аселелерди чыгарууда пайдалануу билгичтиктерин өнүктүрүүгө көмөк берет.

Колдонмо даярдала турган адистиктердин өзгөчөлүктөрүнө жараша математика адистигине жана математик эмес адистиктердин мамлекеттик типтүү программаларынын негизинде түзүлдү.

Усулдук колдонмо жогорку окуу жайларынын бакалавриаттык жана дистанттык бөлүмдөрүндө билим алышкан студенттердин өз алдынча иштөөсү үчүн сунушталат.

§ 1. *Анык эмес интеграл.*

Анык эмес интегралдын касиеттери.

1. $\int f(x)dx = F(x) + C;$ 2. $\int [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx;$

3. $d(\int f(x)dx) = f(x)dx;$ 4. $\int dF(x) = F(x) + C;$ 5. $\int F'(x)dx = F(x) + C;$

Анык эмес интегралды интегралдоонун негизги методдору.

Ордуна коюу методу:

$$\int f(x)dx = \left| \begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{array} \right| = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

Бөлүктөп интегралдоо методу:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x)$$

Анык эмес интегралдын таблицасы.

1. $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1;$ 2. $\int \frac{dx}{x+a} = \ln|x+a| + C;$

3 $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0,\ a \neq 0;$ 4. $\int e^x dx = e^x + C;$

5. $\int \sin x dx = -\cos x + C;$ 6. $\int \cos x dx = \sin x + C;$

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C;$ 8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C;$

9. $\int shxdx = chx + C;$ 10. $\int chxdx = shx + C;$

11. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C;$ 12. $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C;$

13. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C,\ a > 0;$ 14. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C,\ \ a > 0;$

15. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C,\ a \neq 0;$ 16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + C,\ a \neq 0$

№1-5. Таблицалык интегралдоо.

№1. $\int 3{,}4x^{-0{,}17}dx = 3{,}4\frac{x^{-0{,}17+1}}{-0{,}17+1} + C = \frac{3{,}4}{0{,}83}x^{0{,}83} + C$

№2. $\int \cos^2 3xdx = \int \frac{(1+\cos 6x)}{2}dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 6xdx = \frac{1}{2}\left[x + \frac{1}{6}\sin 6x\right] + C$

№3. $\int tg^2 5xdx = \int \frac{\sin^2 5x}{\cos^2 5x}dx = \int \frac{1-\cos^2 5x}{\cos^2 5x}dx = \int\left(\frac{1}{\cos^2 5x} - 1\right)dx =$

$= \int \frac{dx}{\cos^2 5x} - \int dx = \frac{1}{5}tg5x - x + C$

№4. $\int a^x \cdot e^x dx = \int (a\cdot e)^x dx = \frac{(a\cdot e)^x dx}{\ln a \cdot e} + C = \frac{(a\cdot e)^x}{\ln a \cdot \ln e} + C = \frac{a^x e^x}{\ln a + 1} + C.$

№5. $\int \sin^2 4xdx = \int \frac{1-\cos 8x}{2}dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 8xdx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{8}\sin 8x\right) + C$

№1-15. Ордуна коюу методу менен интегралдоо.

№1. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}dx = \int \frac{\sin^2 x \sin x}{\cos^5 x}dx = \int \frac{(1-\cos^2 x)\sin x}{\cos^5 x}dx = \left|\begin{matrix} t = \cos x \\ dt = -\sin xdx \\ dx = -\frac{dt}{\sin x}\end{matrix}\right| = -\int \frac{(1-t^2)}{t^5}dt =$

$= \int \frac{dt}{t^3} - \int \frac{dt}{t^5} = -\frac{1}{2t^2} + \frac{1}{4t^4} + C = -\frac{1}{2\cos^2 x} + \frac{1}{4\cos^4 x} + C.$

.

№2. $\int \frac{e^{arctgx}}{1+x^2}dx = \left|\begin{matrix} t = arctgx \\ dt = \frac{dx}{1+x^2} \\ dx = (1+x^2)dt\end{matrix}\right| = \int e^t dt = e^t + C = e^{arctgx} + C.$

№3. $\int e^{x^3} \cdot x^2 dx = \left|\begin{matrix} t = x^3 \\ dt = 3x^2dx \\ dx = \frac{dt}{3x^2}\end{matrix}\right| = \frac{1}{3}\int e^t dt = \frac{1}{3}e^t + C = \frac{1}{3}e^{x^3} + C$

№4. $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx = \left| \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \\ dx = -\frac{dt}{\sin x} \end{array} \right| = -\int \frac{1}{t^2}dt = -\int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{t} + C = \frac{1}{\cos x} + C$

№5. $\int \frac{3^{2x}}{1+3^{2x}}dx = \left| \begin{array}{l} t = 1+3^{2x} \\ dt = 3^{2x}\ln 3 dx \\ dx = \frac{dt}{3^{2x}\ln 3} \end{array} \right| = \frac{1}{\ln 3}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{\ln 3}\ln|t| + C = \frac{\ln\left|3^{2x}\right|}{\ln 3} + C$

№6. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^3}}dx = \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{1-x^3} \\ t^2 = 1-x^3 \\ 2tdt = -3x^2 dx \\ dx = \frac{2tdt}{-3x^2} \end{array} \right| = -\frac{2}{3}\int \frac{t}{t}dt = -\frac{2}{3}\int dt = -\frac{2}{3}t + C = -\frac{2}{3}\sqrt{1-x^3} + C$

№7. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}dx = \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{\cos x} \\ t^2 = \cos x \\ 2tdt = -\sin x dx \\ dx = \frac{2tdt}{-\sin x} \end{array} \right| = -2\int \frac{t}{t}dt = -2t + C = C - 2\sqrt{\cos x}$

№8. $\int (2x+3)^6 dx = \frac{1}{2}\int (2x+3)^6 d(2x+3) = \frac{(2x+3)^7}{14} + C$

№9. $\int \frac{dx}{(x+a)^k} = \begin{cases} \ln|x+a| + C, & (k=1) \\ \frac{(x+a)^{1-k}}{1-k} + C, & (k \neq 1) \end{cases}$

№10. $\int \frac{xdx}{x^2+a} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2+a\right)}{x^2+a} = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+a\right| + C,$

№11. $\int ctgx dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \ln(\sin x) + C$

№12. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+a}} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2+a\right)}{\sqrt{x^2+a}} = \sqrt{x^2+a} + C$

№13. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d(x/a)}{1+(x/a)^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + C, \qquad a \neq 0$

№14. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{a} \int \frac{d(x/a)}{\sqrt{1-(x/a)^2}} = \frac{1}{a} \arcsin \frac{x}{a} + C, \qquad a > 0$

№15. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{2a} \int \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right) dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, \quad a \neq 0$

№1-10. Рационалдык функцияларды интегралдоо.

№1. $\int \frac{3x-2}{x^2+6x} dx = \int \frac{3x-2}{x(x+6)} dx = \int \frac{Adx}{x} + \int \frac{Bdx}{x+6} = -\frac{1}{3} \int \frac{dx}{x} + \frac{10}{3} \int \frac{dx}{x+6} =$

$$= -\frac{1}{3} \ln|x| + \frac{10}{3} \ln|x+6| + C = \frac{1}{3} [10 \ln|x+6| - \ln|x|] + C.$$

$$\frac{3x-2}{x(x+6)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+6}; \qquad 3x - 2 = A(x+6) + Bx$$

$$\begin{cases} x^1 : A + B = 3 \\ x^0 : 6A = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 3 + \frac{1}{3} \\ A = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = \frac{10}{3} \\ A = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

№2. $\int \frac{3-2x}{x^2-4x} dx = \int \frac{3-2x}{x(x-4)} dx = \int \frac{Adx}{x} + \int \frac{Bdx}{x-4} = -\frac{3}{4} \int \frac{dx}{x} - \frac{5}{4} \int \frac{dx}{x-4} =$

$$= -\frac{1}{4} [3 \ln|x| + 5 \ln|x-4|] + C = \frac{1}{\ln \sqrt[4]{|(x)^3| |(x-4)^4|}} + C.$$

$$\frac{3-2x}{x(x-4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-4};$$
$$3 - 2x = A(x-4) + Bx;$$

$$\begin{cases} x^1 : A + B = -2 \\ x^0 : -4A = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = -2 - A \\ A = -\frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = -\frac{5}{4} \\ A = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

№3. $\int \frac{4-x}{x^2-2x} dx = \int \frac{4-x}{x(x-2)} dx = \int \frac{Adx}{x} + \int \frac{Bdx}{x-2} = -\int \frac{2dx}{x} + \int \frac{dx}{x-2} =$

$$= -2 \ln|x| + \ln|x-2| + C = \ln \frac{|x-2|}{x^2} + C$$

$$\frac{4-x}{x(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2}$$

$$4-x=A(x-2)+Bx$$

$$\begin{cases} A+B=-1 \\ -2A=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=-1+2 \\ A=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=1 \\ A=-2 \end{cases}$$

№4. $\int \frac{2x-1}{x^2+4x-5}dx=\int \frac{2x-1}{(x-1)(x+5)}dx=\int \frac{Adx}{x-1}+\int \frac{Bdx}{x+5}=\frac{1}{6}\int \frac{dx}{x-1}+\frac{11}{6}\int \frac{dx}{x+5}=$

$$=\frac{1}{6}\left[\ln|x-1|\right]|(x+5)^{11}|+C=\ln\sqrt[6]{\ln|x-1|\,|(x+5)^{11}|}+C$$

$$\frac{2x-1}{(x-1)(x+5)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+5}$$

$$2x-1=A(x+5)+B(x-1)$$

$$\begin{cases} A+B=2 \\ 5A-B=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=2-B \\ B=\frac{11}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{6} \\ B=\frac{11}{6} \end{cases}$$

№5. $\int \frac{2-3x}{x^2+2x-3}dx=\int \frac{2-3x}{(x-1)(x+3)}dx=\int \frac{Adx}{x-1}+\int \frac{Bdx}{x+3}=-\frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-1}-\frac{11}{4}\int \frac{dx}{x+3}=$

$$=\frac{-1}{4}\ln|x-1|-\frac{11}{4}\ln|x+3|+C=\frac{-1}{4}\left[\ln|x-1|+11\ln|x+3|\right]+C=\frac{1}{\ln\sqrt[4]{|(x-1)(x+3)^{11}|}}+C$$

$\int$

$$\frac{2-3x}{(x-1)(x+3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}$$

$$2-3x=A(x+3)+B(x-1)$$

$$\begin{cases} A+B=-3 \\ 3A-B=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-3-B \\ B=-\frac{11}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-\frac{1}{4} \\ B=-\frac{11}{4} \end{cases}$$

$$\frac{2x-1}{(x-1)(x+5)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+5}$$

$$2x-1=A(x+5)+B(x-1)$$

$$\begin{cases} A+B=2 \\ 5A-B=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=2-B \\ B=\frac{11}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{6} \\ B=\frac{11}{6} \end{cases}$$

№6. $\int \frac{1-4x}{x^2+6x-7}dx=\int \frac{1-4x}{(x-1)(x+7)}dx=\int \frac{Adx}{x-1}+\int \frac{Bdx}{x+7}=-\frac{3}{8}\int \frac{dx}{x-1}-\frac{29}{8}\int \frac{dx}{x+7}=$

$$=-\frac{3}{8}\ln|x-1|-\frac{29}{8}\ln|x+7|+C=-\frac{1}{8}\left[\ln|(x-1)^3|\,|(x+7)^{29}|\right]+C=\frac{1}{\ln\sqrt[8]{|(x-1)^3|\,[|(x+7)^{29}|]}}+C$$

$$1-4x=A(x+7)+B(x-1)$$

$$\begin{cases}A+B=-4\\7A-B=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-4-B\\B=-\dfrac{29}{8}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-\dfrac{3}{8}\\B=-\dfrac{29}{8}\end{cases}$$

№8. $\displaystyle\int\frac{2-x}{x^2-4x-5}dx=\int\frac{2-x}{(x+1)(x-5)}dx=\int\frac{Adx}{x+1}+\int\frac{Bdx}{x-5}=-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-5}=$

$$=-\frac{1}{2}\left[\ln|x+1|+\ln|x-5|\right]+C=\frac{1}{\ln\sqrt{|x+1|\cdot|x-5|}}+C$$

$$2-x=A(x-5)+B(x+1)$$

$$\begin{cases}A+B=-1\\-5A+B=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-1-B\\B=-\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-\dfrac{1}{2}\\B=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

№9. $\displaystyle\int\frac{2x+1}{x^2+4x+3}dx=\int\frac{2x+1}{(x+1)(x+3)}dx=\int\frac{Adx}{x+1}+\int\frac{Bdx}{x+3}=-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{5}{2}\int\frac{dx}{x+3}=$

$$=-\frac{1}{2}\ln|x|+\frac{5}{2}\ln|x+3|+C=\frac{1}{2}\left[-\ln|x|+5\ln|x+3|\right]+C=\frac{1}{\ln\sqrt{\dfrac{|x+5|^5}{|x|}}}+C$$

$$\frac{2x+1}{(x+1)(x+3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+3}\qquad 2x+1=A(x+3)+B(x+1)$$

$$\begin{cases}A+B=2\\3A+B=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=2-B\\B=\dfrac{5}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-\dfrac{1}{2}\\B=\dfrac{5}{2}\end{cases}$$

№10. $\displaystyle\int\frac{xdx}{3x^2+4x-7}=\int\frac{xdx}{(x-1)(3x+7)}=\int\frac{Adx}{x-1}+\int\frac{Bdx}{3x+7}=\frac{1}{10}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{7}{10}\int\frac{dx}{3x+7}=$

$$=\frac{1}{10}\ln|x-1|+\frac{1}{10}\ln|3x+7|+C=\frac{1}{10}\ln\left[|x-1|(3x+7)|\right]+C=\ln\sqrt[10]{\left[|x-1||3x+7|\right]}+C$$

$$x=A(3x+7)+B(x-1)$$

$$\begin{cases}3A+B=1\\7A-B=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}B=1-3A\\A=\dfrac{1}{10}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}B=\dfrac{7}{10}\\A=\dfrac{1}{10}\end{cases}$$

№1-10. Бөлүктөп интегралдоо методу менен интегралдоо.

$$№1.\ \int x\ln(1-x)dx = \left|\begin{array}{l} dv = xdx \\ v = \dfrac{x^2}{2} \\ u = \ln(1-x) \\ du = \dfrac{1}{1-x}dx \end{array}\right| = \frac{x^2}{2}\ln(1-x) - \frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1-x}dx = \frac{x^2}{2}\ln(1-x) -$$

$$-\frac{1}{2}\int\left((x+1)+\frac{1}{x-1}\right)dx = \frac{x^2}{2}\ln|1-x| + \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln|x-1| + C.$$

$$№2.\ \int(x+1)\cos 3x dx = \left|\begin{array}{l} u = x+1; \\ du = dx \\ dv = \cos 3x dx \\ v = \dfrac{1}{3}\sin 3x \end{array}\right| = \frac{1}{3}(x+1)\sin 3x - \frac{1}{3}\int\sin 3x dx =$$

$$= \frac{1}{3}(x+1)\sin 3x + \frac{1}{9}\cos 3x + C$$

$$№3.\ \int x\cdot 2^{\frac{x}{3}}dx = \left|\begin{array}{l} u = x \\ du = dx \\ dv = 2^{\frac{x}{3}}dx \\ v = \dfrac{2^{\frac{x}{3}}}{3\ln 2} \end{array}\right| = \frac{x}{3\ln 2}\cdot 2^{\frac{x}{3}} - \frac{1}{3\ln 2}\int 2^{\frac{x}{3}}dx = \frac{x}{3\ln 2}\cdot 2^{\frac{x}{3}} - \frac{1}{9\ln^2 2}2^{\frac{x}{3}} + C =$$

$$= \frac{2^{\frac{x}{3}}}{3\ln 2}\left(x - \frac{1}{3\ln 2}\right) + C$$

$$№4.\ \int x\sin\frac{x}{3}dx = \left|\begin{array}{l} u = x \\ du = dx \\ dv = \sin\dfrac{x}{3}dx \\ v = -3\cos\dfrac{x}{3} \end{array}\right| = -3x\cos\frac{x}{3} + 3\int\cos\frac{x}{3}dx = -3x\cos\frac{x}{3} + 9\sin\frac{x}{3} + C$$

$$№5.\ \int(2x+1)\cos x dx = \left|\begin{array}{l} u = 2x+1 \\ du = 2dx \\ dv = \cos x dx \\ v = \sin x \end{array}\right| = (2x+1)\sin x - 2\int\sin x dx = (2x+1)\sin x + 2\cos x + C$$

$$№6.\ \int(1-3x)\sin x dx=\left|\begin{matrix}u=1-3x\\ du=-3dx\\ dv=\sin x dx\\ v=-\cos x\end{matrix}\right|=-(1-3x)\cos x-3\int\cos x dx=-(1-3x)\cos x-3\sin x+C=$$

$$=(3x-1)\cos x-3\sin x+C$$

$$№7.\ \int(2-x)e^x dx=\left|\begin{matrix}u=2-x\\ du=-dx\\ dv=e^x dx\\ v=e^x\end{matrix}\right|=(2-x)e^x+\int e^x dx=(2-x)e^x+e^x+C=(3-x)e^x+C$$

$$№8.\ \int xe^{-\frac{x}{2}}dx=\left|\begin{matrix}u=x\\ du=dx\\ dv=e^{-\frac{x}{2}}dx\\ v=-2e^{-\frac{x}{2}}\end{matrix}\right|=-2xe^{-\frac{x}{2}}+2\int e^{-\frac{x}{2}}dx=-2xe^{-\frac{x}{2}}-4e^{-\frac{x}{2}}+C=C-2e^{-\frac{x}{2}}(x+2)$$

$$№9.\ \int(2x+1)3^x dx=\left|\begin{matrix}u=2x+1\\ du=2dx\\ dv=3^x dx\\ v=\dfrac{3^x}{\ln 3}\end{matrix}\right|=\frac{(2x+1)}{\ln 3}\cdot 3^x-\frac{2}{\ln 3}\int 3^x dx=\frac{3^x}{\ln 3}(2x+1)-\frac{2}{\ln^2 3}3^x+C=$$

$$=\frac{3^x}{\ln 3}\left(2x+1-\frac{2}{\ln 3}\right)+C$$

$$№10.\ \int(3-5x)\ln x dx=\left|\begin{matrix}u=\ln x\\ du=\dfrac{du}{x}\\ dv=(3-5x)dx\\ v=3x-\dfrac{5x^2}{2}\end{matrix}\right|=\left(3x-\frac{5}{2}x^2\right)\ln x-\int\left(3-\frac{5}{2}x\right)dx=$$

$$=\left(3x-\frac{5}{2}x^2\right)\ln x-3x+\frac{5}{4}x^2+C$$

§2. Аныкталган интеграл.

Ньютон-Лейбництин формуласы:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

№1-10. Ньютон-Лейбництин формуласын колдонуп анык интегралды эсептегиле.

№1. $\int_0^{\pi/2} x^{10}dx = \frac{x^{11}}{11}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{11}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{11} - \frac{1}{11}0 = \frac{1}{11}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{11}$

№2. $\int_0^{\pi/2} \sin 2xdx = -\frac{1}{2}\cos 2x\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{1}{2}\left(\cos 2\cdot\frac{\pi}{2} - \cos 2\cdot 0\right) = -\frac{1}{2}(-1-1) = 1$

№3. $\int_0^1 e^{5x}dx = \left|\begin{array}{l} t = 5x \\ dt = 5dx \\ x_1 = 0;\ t_1 = 0 \\ x_2 = 1;\ t_2 = 5 \end{array}\right| = \frac{1}{5}\int_0^5 e^t dt = \frac{1}{5}e^t\Big|_0^5 = \frac{1}{5}\left(e^5 - e^0\right) = \frac{1}{5}\left(e^5 - 1\right)$

№4. $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}} = \left|\begin{array}{l} t = 1+\ln x \\ t-1 = \ln x \\ dt = \frac{dx}{x} \\ xdt = dx \\ x_1 = 1\ t_1 = 1 \\ x_2 = e^3\ t_2 = 4 \end{array}\right| = \int_1^4 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int_2^4 t^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\Bigg|_1^{e^3} = \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\Bigg|_1^{e^3} = 2\sqrt{t}\Big|_1^{e^3} =$

$= 2(\sqrt{4} - \sqrt{1}) = 2\cdot 1 = 2$

$$№5.\ \int_1^2 x\log_2 x\,dx = \left|\begin{matrix} u=\log_2 x \\ du=\dfrac{dx}{x\ln 2} \\ dv = xdx \\ v=\dfrac{x^2}{2} \end{matrix}\right| = \frac{x^2}{2}\log_2 x\Big|_1^2 - \frac{1}{2\ln 2}\int_1^2 xdx = \frac{2^2}{2}\log_2 2 - 0 - \frac{1}{2\ln 2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^2 =$$

$$= 2 - \frac{1}{4\ln 2}(4-1) = 2 - \frac{3}{4\ln 2}.$$

$$№6.\ \int_1^2 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx = \left|\begin{matrix} x=\sin t \\ dx=\cos t dt \\ x_1 = 0 \quad t_1 = 0 \\ x_2 = 1 \quad t_2 = \dfrac{\pi}{2} \end{matrix}\right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cdot\cos^2 t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos^2 t\right)\cos^2 t\,dt =$$

$$= \int_0^{\pi/2}\left(\cos^2 t - \cos^4 t\right)dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\pi/2} - \left[\frac{3}{8}t + \frac{1}{4}\sin 2t + \frac{1}{32}\sin 2t + \frac{1}{32}\sin 4t\right]_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{16} = \frac{\pi}{16}.$$

$$№7.\ \int_0^1 \frac{xdx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\left(x^2+1\right)}\Big|_0^1 = -\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right) = \frac{1}{4};$$

$$№8.\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos xdx = \left|\begin{matrix} u=\cos x; & du=-\sin xdx \\ dv=e^{2x}dx; & v=\dfrac{1}{2}e^{2x} \end{matrix}\right| = \frac{1}{2}e^{2x}\cos x\Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\sin xdx =$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2x}\sin x\Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos xdx\right] = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{\pi} - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cdot\cos xdx$$

$$\int_6^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cdot\cos xdx = \frac{1}{4}e^{\pi} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cdot\cos xdx$$

$$\frac{5}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cdot\cos xdx = \frac{1}{4}e^{\pi} - \frac{1}{2};$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cdot\cos xdx = \frac{4}{5}\left(\frac{1}{4}e^{\pi} - \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{5}\left(\frac{e^{\pi}}{2}-1\right);$$

$$№9.\ \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x}=t \\ x=t^2 \\ dx=2tdt \\ x_1=0;\ \ t_1=0 \\ x_2=1;\ \ t_2=1 \end{array} \right| = \int_0^1 \frac{2t^2}{t+1}dt = 2\int_0^1 \left(t-1+\frac{1}{t+1} \right)dt = 2\left(\frac{t^2}{2}-t+\ln|t+1| \right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}-1+\ln 2 \right) = 2\ln 2 - 1$$

$$№10.\ \int_0^{\pi/4} arctgx dx = \left\| \begin{array}{ll} u=arctgx; & du=\dfrac{1}{1+x^2}dx \\ dv=dx; & v=x \end{array} \right| = x\,arctgx\Big|_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \frac{x}{1+x^2}dx =$$

$$= \frac{\pi}{4}\cdot 1 - \frac{1}{2}\ln|1+x^2|\Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{\pi^2}{16} \right),$$

§ 3. Аныкталган интегралдын колдонуштары.

№1-12. Сызыктар менен чектелген фигуранын аянтын эсептегиле.

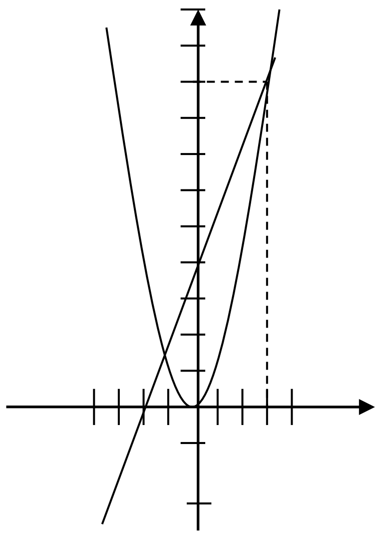
№1. $y = x^2$ параболасы жана $y = 2x + 3$ түз сызыгы менен чектелген фигуранын аянтын эсептегиле. Чиймесин чийгиле.

Парабола менен түз сызыктын кесилиш чекиттерин аныктайбыз.

$$x^2 = 2x + 3$$
$$x^2 - 2x - 3 = 0$$
$$x_1 = -1;\ x_2 = 3$$

Кесилиш чекиттери $M_1(-1;\ 1);\quad M_2(3; 9)$.

$$S = \int_{-1}^{3}(2x + 3 - x^2)dx = 2\int_{-1}^{3} xdx + 3\int_{-1}^{3} dx - \int_{-1}^{3} x^2dx = x^2\Big|_{-1}^{3} + 3x\Big|_{-1}^{3} - \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{3} =$$
$$= (9-1) + 3(3+1) - \frac{1}{3}(27+1) = 8 + 12 - \frac{28}{3} = \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3};\quad S = 10\frac{2}{3}см^2.$$

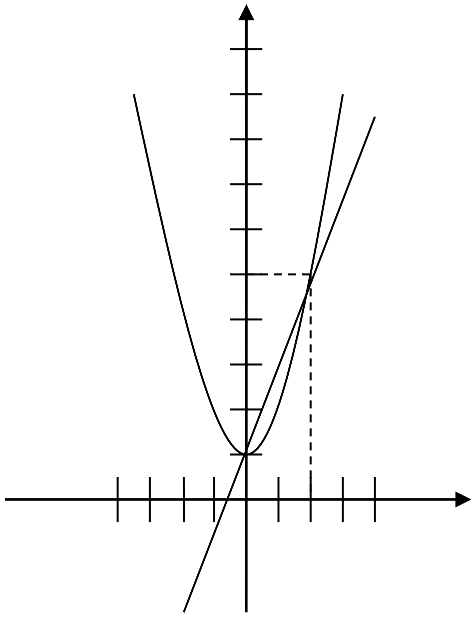


№2. $y = x^2 + 1$ параболасы жана $y = 2x + 1$ түз сызыгы менен чектелген фигуранын аянтын эсептегиле. Чиймесин чийгиле.

Парабола менен түз сызыктын кесилиш чекиттерин аныктайбыз.

$$x^2+1=2x+1;$$
$$x^2+1-2x-1=0$$
$$x^2-2x=0$$
$$x(x-2)=0$$
$$x_1=0;\ x_2=2.$$

Кесилиш чекиттери $M_1(0;\ 1);\quad M_2(2;5).$



$$S=\int_0^2(2x+1-x^2-1)dx=2\int_0^2 xdx-\int_0^2 x^2dx=2x^2\Big|_0^2-\frac{1}{3}x^3\Big|_0^2=2(4-0)-\frac{1}{3}(8-0)=$$
$$=8-\frac{8}{3}=\frac{16}{3}=5\frac{1}{3};$$
$$S=5\frac{1}{3}см^2.$$

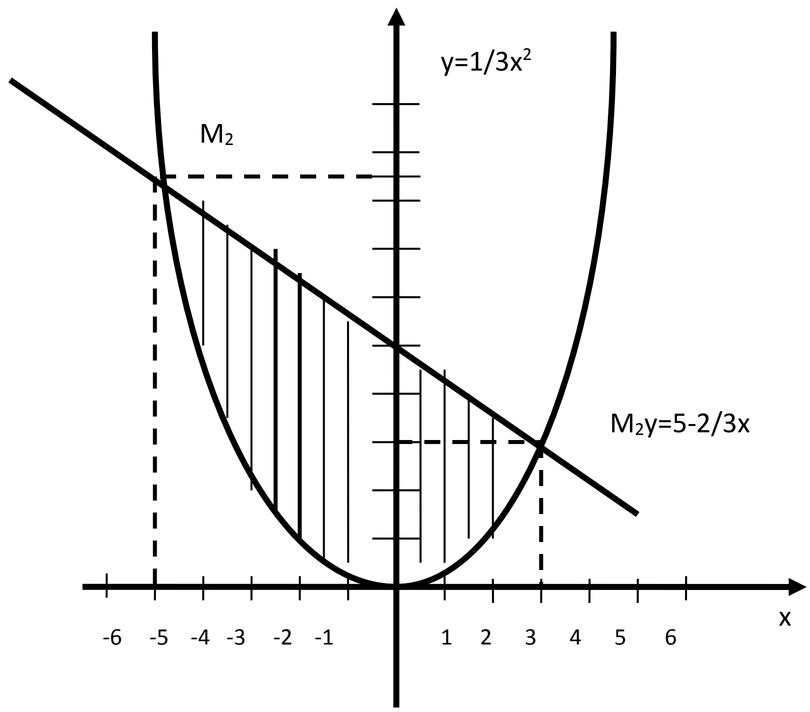
№3. $y=\frac{1}{3}x^2$ параболасы жана $y=5-\frac{2}{3}x$ түз сызыгы менен чектелген фигуранын аянтын эсептегиле. Чиймесин чийгиле.

Парабола менен түз сызыктын кесилиш чекиттерин аныктайбыз.

$$\frac{1}{3}x^2 = 5 - \frac{2}{3}x$$
$$x^2 + 2x - 15 = 0$$
$$x_1 = -5; \quad x_2 = 3$$

Кесилиш чекиттери $M_1\left(5;\ \frac{25}{3}\right);\quad M_2(3;3)$.

$$S = \int_{-5}^{3}(5 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}x^2)dx = 5x\Big|_{-5}^{3} - \frac{1}{3}x^2\Big|_{-5}^{3} - \frac{1}{9}x^3\Big| = 5(3+5) + \frac{1}{3}(9-25) - \frac{1}{9}(27+125) =$$
$$= 40 - \frac{16}{3} - \frac{152}{9} = \frac{360-48-152}{9} = \frac{160}{9} = 17\frac{7}{9}$$
$$S = 17\frac{7}{9}\,см^2.$$



№4. $y = x^2$ параболасы жана $x = 1;\ x = 3$ түз сызыктары менен чектелген фигуранын аянтын эсептегиле. Чиймесин чийгиле.

Парабола менен түз сызыктын кесилиш чекиттерин аныктайбыз.

$$x = 1;\ \ y = 1;$$
$$x = 3;\ \ y = 9;$$

Кесилиш чекиттери $M_1(1;\ 1);\quad M_2(3;9)$.

$$s=\int_1^3 x^2dx=\frac{x^3}{3}\bigg|_1^3=\frac{1}{3}(27-1)=\frac{26}{3};\quad S=8\frac{2}{3}см^2.$$

№5. $y=1-x^2$ параболасы жана $2x-y-2=0$ түз сызыгы менен чектелген фигуранын аянтын эсептегиле. Чиймесин чийгиле.

Парабола менен түз сызыктын кесилиш чекиттерин аныктайбыз.

$$1-x^2=2x-2$$
$$x^2+2x-3=0$$
$$x_1=1;\ x_2=-3$$

Кесилиш чекиттери $M_1(1;\ 0);\quad M_2(-3;-8).$

$$S=\int_{-3}^{1}(1-x^2-2x+2)dx=\int_{-3}^{1}(3-2x-x^2)dx=3\int_{-3}^{1}dx-2\int_{-3}^{1}xdx-\int_{-3}^{1}x^2dx=$$
$$=3x\Big|_{-3}^{1}-x^2\Big|_{-3}^{1}-\frac{1}{3}x^3\bigg|_{-3}^{1}=3(1+3)-(1-9)-\frac{1}{3}(1+27)=12+8-\frac{28}{3}=\frac{32}{3}=10\frac{2}{3};$$
$$S=10\frac{2}{3}см^2.$$

№6. $y=x^2$ параболасы жана $y=2x$ түз сызыгы менен чектелген фигуранын аянтын эсептегиле. Чиймесин чийгиле.

Парабола менен түз сызыктын кесилиш чекиттерин аныктайбыз.

$$x^2=2x$$
$$x^2-2x=0$$
$$x(x-2)=0$$
$$x_1=0;\ x_2=2;$$

Кесилиш чекиттери $M_1(0;\ 0);\quad M_2(2;4).$

$$S=\int_0^2(2x-x^2)dx=2\int_0^2 xdx-\int_0^2 x^2dx=x^2\Big|_0^2-\frac{1}{3}x^3\bigg|_0^2=4-\frac{1}{3}\cdot 8=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3};\quad S=1\frac{1}{3}см^2.$$

№7. $y=x^2-2$ параболасы жана $y=x-2$ түз сызыгы менен чектелген фигуранын аянтын эсептегиле. Чиймесин чийгиле.

Парабола менен түз сызыктын кесилиш чекиттерин аныктайбыз.

$$x^2-2=x-2;\ x^2-x=0;\ x(x-1)=0;\quad x_1=0;\ x_2=1;$$

Кесилиш чекиттери $M_1(0;\ -2);\quad M_2(1;-1).$

$$S=\int_0^1 (x-2-x^2+2)dx=\int_0^1 xdx-\int_0^1 x^2dx=x^2\Big|_0^1-\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1=1-\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{2}{3}=\frac{2}{3};\ \ S=\frac{2}{3}см^2.$$

№8. $y=x^2+2$ параболасы жана $y=2x+2$ түз сызыгы менен чектелген фигуранын аянтын эсептегиле. Чиймесин чийгиле.

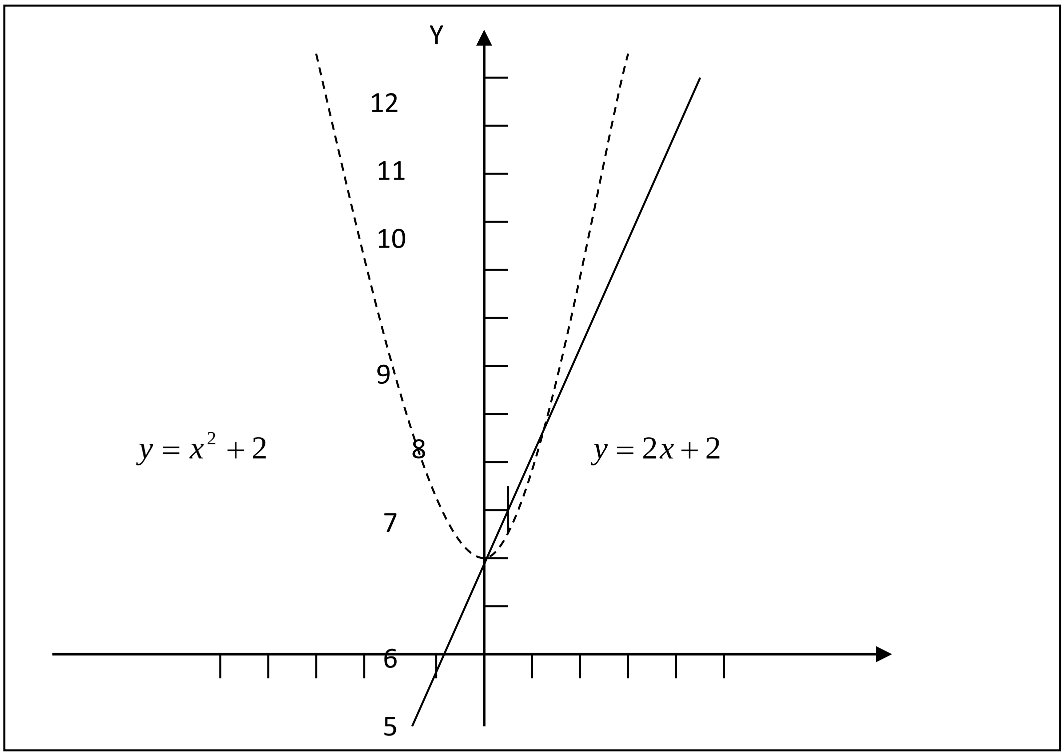
Парабола менен түз сызыктын кесилиш чекиттерин аныктайбыз.

$x^2+2=2x+2;\ x^2-2x=0;\ x(x-2)=0;\ x_1=0 \quad x_2=2$

Кесилиш чекиттери $M_1(0;\ 2);\ \ M_2(2;6)$.

$$S=\int_0^2 (2x+2-x^2-2)dx=2\int_0^2 xdx-\int_0^2 x^2dx=2x^2\Big|_0^2-\frac{1}{3}x^3\Big|_0^2=8-\frac{1}{3}\cdot 8=\frac{16}{3}=5\frac{1}{3};$$

$S=5\frac{1}{3}см^2.$



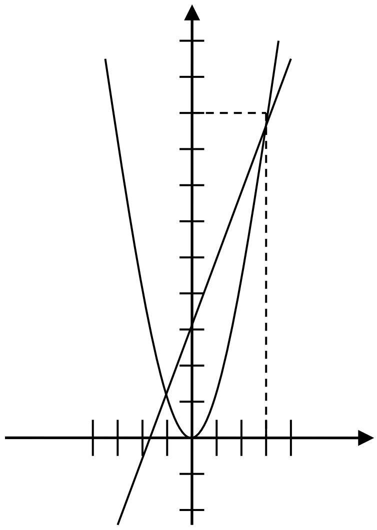
№9. $y=x^2$ параболасы жана $y=2x+3$ түз сызыгы менен чектелген фигуранын аянтын эсептегиле. Чиймесин чийгиле.

Парабола менен түз сызыктын кесилиш чекиттерин аныктайбыз.

$$x^2 = 2x + 3$$
$$x^2 - 2x - 3 = 0$$
$$x_1 = -1; \quad x_2 = 3;$$

Кесилиш чекиттери $M_1(-1;\ 1); \quad M_2(3;9)$.

$$S = \int_{-1}^{3}\left(2x + 3 - x^2\right)dx = 2\int_{-1}^{3} xdx + 3\int_{-1}^{3} dx - \int_{-1}^{3} x^2 dx = x^2\Big|_{-1}^{3} + 3x\Big|_{-1}^{3} - \frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{3} =$$
$$= (9-1) + 3(3+1) - \frac{1}{3}(9+1) = 8 + 12 - \frac{10}{3} = \frac{50}{3} = 16\frac{2}{3};$$
$$S = 16\frac{2}{3}см^2.$$



№10. $y = x^2$ параболасы жана $y = 3 - 2x$ түз сызыгы менен чектелген фигуранын аянтын эсептегиле. Чиймесин чийгиле.

Парабола менен түз сызыктын кесилиш чекиттерин аныктайбыз.

$$x^2 = 3 - 2x$$
$$x^2 + 2x - 3 = 0$$
$$x_1 = -3; \ x_2 = 1;$$

Кесилиш чекиттери $M_1(-3;\ 9); \quad M_2(1;1)$.

$$S = \int_{-3}^{1}\left(3 - 2x - x^2\right)dx = 3\int_{-3}^{1} dx - 2\int_{-3}^{1} xdx - \int_{-3}^{1} x^2 dx = 3x\Big|_{-3}^{1} - x^2\Big|_{-3}^{1} - \frac{1}{3}x^3\Big|_{-3}^{1} =$$
$$= 12 + 8 - \frac{28}{3} = \frac{32}{3}; \ \ S = 10\frac{2}{3}\ см^2.$$

№11. $y = x^2$ параболасы жана $y = 2 - x$ түз сызыгы менен чектелген фигуранын аянтын эсептегиле. Чиймесин чийгиле.

Парабола менен түз сызыктын кесилиш чекиттерин аныктайбыз.

$$x^2 = 2 - x$$
$$x^2 + x - 2 = 0$$
$$x_1 = -2 \quad x_2 = 1$$

Кесилиш чекиттери $M_1(-2;\ 4)$; $M_2(1;1)$.

$$S = \int_{-2}^{1}(2 - x - x^2)dx = 2\int_{-2}^{1}dx - \int_{-2}^{1}xdx - \int_{-2}^{1}x^2dx = 2x\Big|_{-2}^{1} - \frac{1}{2}x^2\Big|_{-2}^{1} - \frac{1}{3}x^3\Big|_{-2}^{1} =$$
$$= 2(1+2) - \frac{1}{2}(1-4) - \frac{1}{3}(1+8) = 6 + \frac{3}{2} - 3 = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2};$$
$$S = 4\frac{1}{2}\,см^2.$$

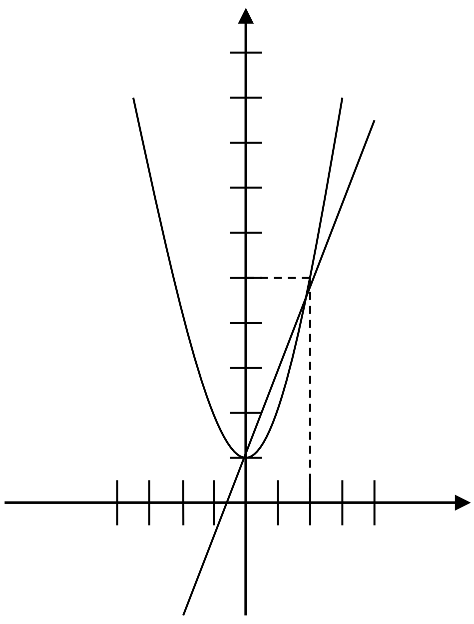
№12. $y = x^2 + 1$ параболасы жана $y = 2x + 1$ түз сызыгы менен чектелген фигуранын аянтын эсептегиле. Чиймесин чийгиле.

Парабола менен түз сызыктын кесилиш чекиттерин аныктайбыз.

$$x^2 + 1 = 2x + 1; \quad x^2 - 2x = 0; \quad x(x-2) = 0; \quad x_1 = 0;\ x_2 = 2;$$

Кесилиш чекиттери $M_1(0;\ 1)$; $M_2(2;5)$.

$$S = \int_{0}^{2}(2x + 1 - x^2 - 1)dx = 2\int_{0}^{2}xdx - \int_{0}^{2}x^2dx = x^2\Big|_{0}^{2} - \frac{1}{3}x^3\Big|_{0}^{2} = 4 - \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3};\ S = 2\frac{2}{3}\,см^2.$$



§ 1.2. Неопределенные интегралы.

Свойства неопределенных интегралов.

1. $\int f(x)dx = F(x) + C;$ 2. $\int [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx;$

3. $d(\int f(x)dx) = f(x)dx;$ 4. $\int dF(x) = F(x) + C;$ 5. $\int F'(x)dx = F(x) + C;$

Основные методы неопределенных интегралов.

1.Метод подстановок.

$$\int f(x)dx = \begin{vmatrix} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{vmatrix} = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

2.*Метод интегрирование по частям.*

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x)$$

Таблица неопределенных интегралов.

1. $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad (\alpha \neq -1);$ 2. $\int \dfrac{dx}{x+a} = \ln|x+a| + C;$

3 $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0,\ a \neq 0;$ 4. $\int e^x dx = e^x + C;$

5. $\int \sin x dx = -\cos x + C;$ 6. $\int \cos x dx = \sin x + C;$

7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C;$ 8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C;$

9. $\int shxdx = chx + C;$ 10. $\int chxdx = shx + C;$

11. $\int \dfrac{dx}{ch^2 x} = thx + C;$ 12. $\int \dfrac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C;$

13. $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{x}{a} + C,\ a > 0;$ 14. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C,\ a > 0;$

15. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C,\ a \neq 0;$ 16. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C,\ a \neq 0$

№1-5. **Табличное интегрирование.**

№1. $\int 3{,}4x^{-0{,}17}dx = 3{,}4\frac{x^{-0{,}17+1}}{-0{,}17+1} + C = \frac{3{,}4}{0{,}83}x^{0{,}83} + C$

№2. $\int \cos^2 3xdx = \int \frac{(1+\cos 6x)}{2}dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 6xdx = \frac{1}{2}\left[x + \frac{1}{6}\sin 6x\right] + C$

№3. $\int tg^2 5xdx = \int \frac{\sin^2 5x}{\cos^2 5x}dx = \int \frac{1-\cos^2 5x}{\cos^2 5x}dx = \int\left(\frac{1}{\cos^2 5x} - 1\right)dx =$

$= \int \frac{dx}{\cos^2 5x} - \int dx = \frac{1}{5}tg5x - x + C$

№4. $\int a^x \cdot e^x dx = \int (a\cdot e)^x dx = \frac{(a\cdot e)^x dx}{\ln a\cdot e} + C = \frac{(a\cdot e)^x}{\ln a\cdot \ln e} + C = \frac{a^x e^x}{\ln a + 1} + C.$

№5. $\int \sin^2 4xdx = \int \frac{1-\cos 8x}{2}dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 8xdx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{8}\sin 8x\right) + C$

№1-15. Интегрирование методом подстановки.

№1. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}dx = \int \frac{\sin^2 x\sin x}{\cos^5 x}dx = \int \frac{(1-\cos^2 x)\sin x}{\cos^5 x}dx = \left| \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin xdx \\ dx = -\dfrac{dt}{\sin x} \end{array} \right| = -\int \frac{(1-t^2)}{t^5}dt =$

$= \int \frac{dt}{t^3} - \int \frac{dt}{t^5} = -\frac{1}{2t^2} + \frac{1}{4t^4} + C = -\frac{1}{2\cos^2 x} + \frac{1}{4\cos^4 x} + C.$

.

№2. $\int \frac{e^{arctgx}}{1+x^2}dx = \left| \begin{array}{l} t = arctgx \\ dt = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dx = (1+x^2)dt \end{array} \right| = \int e^t dt = e^t + C = e^{arctgx} + C.$

№3. $\int e^{x^3}\cdot x^2 dx = \left| \begin{array}{l} t = x^3 \\ dt = 3x^2 dx \\ dx = \dfrac{dt}{3x^2} \end{array} \right| = \frac{1}{3}\int e^t dt = \frac{1}{3}e^t + C = \frac{1}{3}e^{x^3} + C$

№4. $$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx = \left| \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \\ dx = -\dfrac{dt}{\sin x} \end{array} \right| = -\int \frac{1}{t^2}dt = -\int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{t} + C = \frac{1}{\cos x} + C$$

№5. $$\int \frac{3^{2x}}{1+3^{2x}}dx = \left| \begin{array}{l} t = 1+3^{2x} \\ dt = 3^{2x}\ln 3 dx \\ dx = \dfrac{dt}{3^{2x}\ln 3} \end{array} \right| = \frac{1}{\ln 3}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{\ln 3}\ln|t| + C = \frac{\ln\left|3^{2x}\right|}{\ln 3} + C$$

№6. $$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^3}}dx = \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{1-x^3} \\ t^2 = 1-x^3 \\ 2tdt = -3x^2dx \\ dx = \dfrac{2tdt}{-3x^2} \end{array} \right| = -\frac{2}{3}\int \frac{t}{t}dt = -\frac{2}{3}\int dt = -\frac{2}{3}t + C = -\frac{2}{3}\sqrt{1-x^3} + C$$

№7. $$\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}dx = \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{\cos x} \\ t^2 = \cos x \\ 2tdt = -\sin x dx \\ dx = \dfrac{2tdt}{-\sin x} \end{array} \right| = -2\int \frac{t}{t}dt = -2t + C = C - 2\sqrt{\cos x}$$

№8. $$\int (2x+3)^6 dx = \frac{1}{2}\int (2x+3)^6 d(2x+3) = \frac{(2x+3)^7}{14} + C$$

№9. $$\int \frac{dx}{(x+a)^k} = \begin{cases} \ln|x+a| + C, & (k=1) \\ \dfrac{(x+a)^{1-k}}{1-k} + C, & (k \neq 1) \end{cases}$$

№10. $$\int \frac{xdx}{x^2+a} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2+a\right)}{x^2+a} = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+a\right| + C,$$

№11. $\int ctgx dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \ln(\sin x) + C$

№12. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + a}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2 + a)}{\sqrt{x^2 + a}} = \sqrt{x^2 + a} + C$

№13. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d(x/a)}{1 + (x/a)^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C, \qquad a \neq 0$

№14. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{d(x/a)}{\sqrt{1 - (x/a)^2}} = \frac{1}{a}\arcsin\frac{x}{a} + C, \qquad a > 0$

№15. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{2a}\int \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, \quad a \neq 0$

№1-10. Интегрирование рационалных функции.

№1. $$\int \frac{3x-2}{x^2+6x}dx = \int \frac{3x-2}{x(x+6)}dx = \int \frac{Adx}{x} + \int \frac{Bdx}{x+6} = -\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x} + \frac{10}{3}\int \frac{dx}{x+6} =$$

$$= -\frac{1}{3}\ln|x| + \frac{10}{3}\ln|x+6| + C = \frac{1}{3}\left[10\ln|x+6| - \ln|x|\right] + C.$$

$$\frac{3x-2}{x(x+6)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+6}; \qquad 3x - 2 = A(x+6) + Bx$$

$$\begin{cases} x^1 : A + B = 3 \\ x^0 : 6A = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 3 + \frac{1}{3} \\ A = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = \frac{10}{3} \\ A = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

№2. $\int \frac{3-2x}{x^2-4x}dx = \int \frac{3-2x}{x(x-4)}dx = \int \frac{Adx}{x} + \int \frac{Bdx}{x-4} = -\frac{3}{4}\int \frac{dx}{x} - \frac{5}{4}\int \frac{dx}{x-4} =$

$$= -\frac{1}{4}\left[3\ln|x| + 5\ln|x-4|\right] + C = \frac{1}{\ln\sqrt[4]{\left|(x)^3\right|\left|(x-4)^4\right|}} + C.$$

$$\frac{3-2x}{x(x-4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-4};$$

$$3-2x = A(x-4) + Bx;$$

$$\begin{cases} x^1: A+B=-2 \\ x^0: -4A=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=-2-A \\ A=-\frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=-\frac{5}{4} \\ A=-\frac{3}{4} \end{cases}$$

№3. $\int \frac{4-x}{x^2-2x}dx = \int \frac{4-x}{x(x-2)}dx = \int \frac{Adx}{x} + \int \frac{Bdx}{x-2} = -\int \frac{2dx}{x} + \int \frac{dx}{x-2} =$

$$= -2\ln|x| + \ln|x-2| + C = \ln\frac{|x-2|}{x^2} + C$$

$$\frac{4-x}{x(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2}$$

$$4-x = A(x-2) + Bx$$

$$\begin{cases} A+B=-1 \\ -2A=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=-1+2 \\ A=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=1 \\ A=-2 \end{cases}$$

№4. $\int \frac{2x-1}{x^2+4x-5}dx = \int \frac{2x-1}{(x-1)(x+5)}dx = \int \frac{Adx}{x-1} + \int \frac{Bdx}{x+5} = \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{11}{6}\int \frac{dx}{x+5} =$

$$= \frac{1}{6}\left[\ln|x-1|\right]\left|(x+5)^{11}\right| + C = \ln\sqrt[6]{\ln|x-1|\left|(x+5)^{11}\right|} + C$$

$$\frac{2x-1}{(x-1)(x+5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+5}$$

$$2x-1 = A(x+5) + B(x-1)$$

$$\begin{cases} A+B=2 \\ 5A-B=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=2-B \\ B=\frac{11}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{6} \\ B=\frac{11}{6} \end{cases}$$

№5. $\int \frac{2-3x}{x^2+2x-3}dx = \int \frac{2-3x}{(x-1)(x+3)}dx = \int \frac{Adx}{x-1} + \int \frac{Bdx}{x+3} = -\frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{11}{4}\int \frac{dx}{x+3} =$

$$= \frac{-1}{4}\ln|x-1| - \frac{11}{4}\ln|x+3| + C = \frac{-1}{4}\left[\ln|x-1| + 11\ln|x+3|\right] + C = \frac{1}{\ln\sqrt[4]{\left|(x-1)(x+3)^{11}\right|}} + C$$

$\int$

$$\frac{2-3x}{(x-1)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3}$$

$$2-3x = A(x+3) + B(x-1)$$

$$\begin{cases} A+B=-3 \\ 3A-B=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-3-B \\ B=-\frac{11}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-\frac{1}{4} \\ B=-\frac{11}{4} \end{cases}$$

$$\frac{2x-1}{(x-1)(x+5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+5}$$

$$2x-1 = A(x+5) + B(x-1)$$

$$\begin{cases} A+B=2 \\ 5A-B=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=2-B \\ B=\frac{11}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{6} \\ B=\frac{11}{6} \end{cases}$$

№6. $\int \frac{1-4x}{x^2+6x-7}dx = \int \frac{1-4x}{(x-1)(x+7)}dx = \int \frac{Adx}{x-1} + \int \frac{Bdx}{x+7} = -\frac{3}{8}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{29}{8}\int \frac{dx}{x+7} =$

$$= -\frac{3}{8}\ln|x-1| - \frac{29}{8}\ln|x+7| + C = -\frac{1}{8}\left[\ln\left|(x-1)^3\right|\left|(x+7)^{29}\right|\right] + C = \frac{1}{\ln\sqrt[8]{\left|(x-1)^3\right|\left|(x+7)^{29}\right|}} + C$$

$$1-4x = A(x+7) + B(x-1)$$

$$\begin{cases} A+B=-4 \\ 7A-B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-4-B \\ B=-\frac{29}{8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-\frac{3}{8} \\ B=-\frac{29}{8} \end{cases}$$

№7. $\int \frac{x+2}{3x^2+2x-5}dx = \int \frac{x+2}{(x-1)(3x+5)}dx = \int \frac{Adx}{x-1} + \int \frac{Bdx}{3x+5} = \frac{3}{8}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{8}\int \frac{dx}{3x+5} =$

$$= \frac{3}{8}\ln|x-1| - \frac{1}{24}\ln|3x+5| + C = \frac{1}{8}\ln\frac{\left|(x-1)^3\right|}{\left|\sqrt[3]{3x+5}\right|} + C = \ln\sqrt[8]{\frac{\left|(x-1)^3\right|}{\left|\sqrt[3]{3x+5}\right|}} + C$$

$$\frac{x+2}{(x-1)(3x+5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{3x+5}$$

$$x+2 = A(3x+5) + B(x-1)$$

$$\begin{cases} 3A+B=1 \\ 5A-B=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=1-3A \\ A=\frac{3}{8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=-\frac{1}{8} \\ A=\frac{3}{8} \end{cases}$$

№8. $\int \frac{2-x}{x^2-4x-5}dx = \int \frac{2-x}{(x+1)(x-5)}dx = \int \frac{Adx}{x+1} + \int \frac{Bdx}{x-5} = -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-5} =$

$= -\frac{1}{2}\left[\ln|x+1| + \ln|x-5|\right] + C = \frac{1}{\ln\sqrt{|x+1|\cdot|x-5|}} + C$

$2-x = A(x-5) + B(x+1)$

$\begin{cases} A+B=-1 \\ -5A+B=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-1-B \\ B=-\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-\frac{1}{2} \\ B=-\frac{1}{2} \end{cases}$

№9. $\int \frac{2x+1}{x^2+4x+3}dx = \int \frac{2x+1}{(x+1)(x+3)}dx = \int \frac{Adx}{x+1} + \int \frac{Bdx}{x+3} = -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{5}{2}\int \frac{dx}{x+3} =$

$= -\frac{1}{2}\ln|x| + \frac{5}{2}\ln|x+3| + C = \frac{1}{2}\left[-\ln|x| + 5\ln|x+3|\right] + C = \frac{1}{\ln\sqrt{\frac{|x+5|^5}{|x|}}} + C$

$\frac{2x+1}{(x+1)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+3}$ $\qquad 2x+1 = A(x+3) + B(x+1)$

$\begin{cases} A+B=2 \\ 3A+B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=2-B \\ B=\frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-\frac{1}{2} \\ B=\frac{5}{2} \end{cases}$

№10. $\int \frac{xdx}{3x^2+4x-7} = \int \frac{xdx}{(x-1)(3x+7)} = \int \frac{Adx}{x-1} + \int \frac{Bdx}{3x+7} = \frac{1}{10}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{7}{10}\int \frac{dx}{3x+7} =$

$= \frac{1}{10}\ln|x-1| + \frac{1}{10}\ln|3x+7| + C = \frac{1}{10}\ln\left[|x-1||(3x+7)|\right] + C = \ln\sqrt[10]{\left[|x-1||3x+7|\right]} + C$

$x = A(3x+7) + B(x-1)$

$\begin{cases} 3A+B=1 \\ 7A-B=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=1-3A \\ A=\frac{1}{10} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=\frac{7}{10} \\ A=\frac{1}{10} \end{cases}$

№1-10. Интегрирование по частям.

№1. $\int x\ln(1-x)dx = \begin{vmatrix} dv = xdx \\ v = \frac{x^2}{2} \\ u = \ln(1-x) \\ du = \frac{1}{1-x}dx \end{vmatrix} = \frac{x^2}{2}\ln(1-x) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1-x}dx = \frac{x^2}{2}\ln(1-x) -$

$-\frac{1}{2}\int\left((x+1) + \frac{1}{x-1}\right)dx = \frac{x^2}{2}\ln|1-x| + \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln|x-1| + C.$

№2. $\int (x+1)\cos 3x dx = \left| \begin{array}{l} u = x+1; \\ du = dx \\ dv = \cos 3x dx \\ v = \frac{1}{3}\sin 3x \end{array} \right| = \frac{1}{3}(x+1)\sin 3x - \frac{1}{3}\int \sin 3x dx =$

$= \frac{1}{3}(x+1)\sin 3x + \frac{1}{9}\cos 3x + C$

№3. $\int x \cdot 2^{\frac{x}{3}} dx = \left| \begin{array}{l} u = x \\ du = dx \\ dv = 2^{\frac{x}{3}} dx \\ v = \frac{2^{\frac{x}{3}}}{3\ln 2} \end{array} \right| = \frac{x}{3\ln 2} \cdot 2^{\frac{x}{3}} - \frac{1}{3\ln 2}\int 2^{\frac{x}{3}} dx = \frac{x}{3\ln 2} \cdot 2^{\frac{x}{3}} - \frac{1}{9\ln^2 2} 2^{\frac{x}{3}} + C =$

$= \frac{2^{\frac{x}{3}}}{3\ln 2}\left(x - \frac{1}{3\ln 2} \right) + C$

№4. $\int x \sin \frac{x}{3} dx = \left| \begin{array}{l} u = x \\ du = dx \\ dv = \sin \frac{x}{3} dx \\ v = -3\cos \frac{x}{3} \end{array} \right| = -3x\cos \frac{x}{3} + 3\int \cos \frac{x}{3} dx = -3x\cos \frac{x}{3} + 9\sin \frac{x}{3} + C$

№5. $\int (2x+1)\cos x dx = \left| \begin{array}{l} u = 2x+1 \\ du = 2dx \\ dv = \cos x dx \\ v = \sin x \end{array} \right| = (2x+1)\sin x - 2\int \sin x dx = (2x+1)\sin x + 2\cos x + C$

№6. $\int (1-3x)\sin x dx = \left| \begin{array}{l} u = 1-3x \\ du = -3dx \\ dv = \sin x dx \\ v = -\cos x \end{array} \right| = -(1-3x)\cos x - 3\int \cos x dx = -(1-3x)\cos x - 3\sin x + C =$

$= (3x-1)\cos x - 3\sin x + C$

№7. $\int (2-x)e^x dx = \left| \begin{array}{l} u = 2-x \\ du = -dx \\ dv = e^x dx \\ v = e^x \end{array} \right| = (2-x)e^x + \int e^x dx = (2-x)e^x + e^x + C = (3-x)e^x + C$

$$№8.\ \int xe^{-\frac{x}{2}}dx=\left|\begin{array}{l}u=x\\du=dx\\dv=e^{-\frac{x}{2}}dx\\v=-2e^{-\frac{x}{2}}\end{array}\right|=-2xe^{-\frac{x}{2}}+2\int e^{-\frac{x}{2}}dx=-2xe^{-\frac{x}{2}}-4e^{-\frac{x}{2}}+C=C-2e^{-\frac{x}{2}}(x+2)$$

$$№9.\ \int(2x+1)3^x\,dx=\left|\begin{array}{l}u=2x+1\\du=2dx\\dv=3^x\,dx\\v=\dfrac{3^x}{\ln 3}\end{array}\right|=\frac{(2x+1)}{\ln 3}\cdot 3^x-\frac{2}{\ln 3}\int 3^x\,dx=\frac{3^x}{\ln 3}(2x+1)-\frac{2}{\ln^2 3}3^x+C=$$

$$=\frac{3^x}{\ln 3}\left(2x+1-\frac{2}{\ln 3}\right)+C$$

$$№10.\ \int(3-5x)\ln x\,dx=\left|\begin{array}{l}u=\ln x\\du=\dfrac{du}{x}\\dv=(3-5x)dx\\v=3x-\dfrac{5x^2}{2}\end{array}\right|=\left(3x-\frac{5}{2}x^2\right)\ln x-\int\left(3-\frac{5}{2}x\right)dx=$$

$$=\left(3x-\frac{5}{2}x^2\right)\ln x-3x+\frac{5}{4}x^2+C$$

§ 2.1. Определенные интегралы.

Формула Ньютона-Лейбница: $\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

№1-10. Вычислить по формуле Ньютона-Лейбница определенной интеграл.

№1. $\int\limits_0^{\pi/2} x^{10}dx = \frac{x^{11}}{11}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{11}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{11} - \frac{1}{11}0 = \frac{1}{11}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{11}$

№2. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin 2xdx = -\frac{1}{2}\cos 2x\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{1}{2}\left(\cos 2\cdot\frac{\pi}{2} - \cos 2\cdot 0\right) = -\frac{1}{2}(-1-1) = 1$

№3. $\int\limits_0^1 e^{5x}dx = \left|\begin{matrix} t = 5x \\ dt = 5dx \\ x_1 = 0;\ \ t_1 = 0 \\ x_2 = 1;\ t_2 = 5 \end{matrix}\right| = \frac{1}{5}\int\limits_0^5 e^t dt = \frac{1}{5}e^t\Big|_0^5 = \frac{1}{5}\left(e^5 - e^0\right) = \frac{1}{5}\left(e^5 - 1\right)$

№4. $\int\limits_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}} = \left|\begin{matrix} t = 1 + \ln x \\ t - 1 = \ln x \\ dt = \dfrac{dx}{x} \\ xdt = dx \\ x_1 = 1\ t_1 = 1 \\ x_2 = e^3\ \ t_2 = 4 \end{matrix}\right| = \int\limits_1^4 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int\limits_2^4 t^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\Bigg|_1^{e^3} = \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\Bigg|_1^{e^3} = 2\sqrt{t}\Big|_1^{e^3} =$

$= 2(\sqrt{4} - \sqrt{1}) = 2\cdot 1 = 2$

№5. $\int\limits_1^2 x\log_2 xdx = \left|\begin{matrix} u = \log_2 x \\ du = \dfrac{dx}{x\ln 2} \\ dv = xdx \\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix}\right| = \frac{x^2}{2}\log_2 x\Big|_1^2 - \frac{1}{2\ln 2}\int\limits_1^2 xdx = \frac{2^2}{2}\log_2 2 - 0 - \frac{1}{2\ln 2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^2 =$

$= 2 - \frac{1}{4\ln 2}(4-1) = 2 - \frac{3}{4\ln 2}.$

№6. $$\int_1^2 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx = \left|\begin{matrix} x=\sin t \\ dx=\cos t\,dt \\ x_1=0\ \ t_1=0 \\ x_2=1\ \ t_2=\dfrac{\pi}{2}\end{matrix}\right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cdot\cos^2 t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos^2 t\right)\cos^2 t\,dt =$$

$$= \int_0^{\pi/2}\left(\cos^2 t-\cos^4 t\right)dt = \left[\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\pi/2} - \left[\frac{3}{8}t+\frac{1}{4}\sin 2t+\frac{1}{32}\sin 2t+\frac{1}{32}\sin 4t\right]_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{\pi}{4}-\frac{3\pi}{16}=\frac{\pi}{16}.$$

№7. $$\int_0^1 \frac{xdx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\left(x^2+1\right)}\Bigg|_0^1 = -\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)=\frac{1}{4};$$

№8. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x\,dx = \left|\begin{matrix} u=\cos x; & du=-\sin x\,dx \\ dv=e^{2x}dx; & v=\dfrac{1}{2}e^{2x}\end{matrix}\right| = \frac{1}{2}e^{2x}\cos x\Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\sin x\,dx =$$

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2x}\sin x\Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x\,dx\right] = -\frac{1}{2}+\frac{1}{4}e^{\pi} - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cdot\cos x\,dx$$

$$\int_6^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cdot\cos x\,dx = \frac{1}{4}e^{\pi} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cdot\cos x\,dx$$

$$\frac{5}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cdot\cos x\,dx = \frac{1}{4}e^{\pi}-\frac{1}{2};$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cdot\cos x\,dx = \frac{4}{5}\left(\frac{1}{4}e^{\pi}-\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{5}\left(\frac{e^{\pi}}{2}-1\right);$$

№9. $$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}\,dx = \left|\begin{matrix} \sqrt{x}=t \\ x=t^2 \\ dx=2t\,dt \\ x_1=0;\ \ t_1=0 \\ x_2=1;\ \ t_2=1\end{matrix}\right| = \int_0^1 \frac{2t^2}{t+1}\,dt = 2\int_0^1\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt = 2\left(\frac{t^2}{2}-t+\ln|t+1|\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}-1+\ln 2\right) = 2\ln 2-1$$

№10. $$\int_0^{\pi/4} arctgx\,dx = \left|\begin{matrix} u=arctgx; & du=\dfrac{1}{1+x^2}dx \\ dv=dx; & v=x\end{matrix}\right| = x\,arctgx\Big|_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4}\frac{x}{1+x^2}dx =$$

$$= \frac{\pi}{4}\cdot 1-\frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|\Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right),$$

§3.1. *Приложение определенного интеграла.*

№1-12. ***Вычислить площадь фигуры ограниченной линиями.***

№1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2$ и прямой

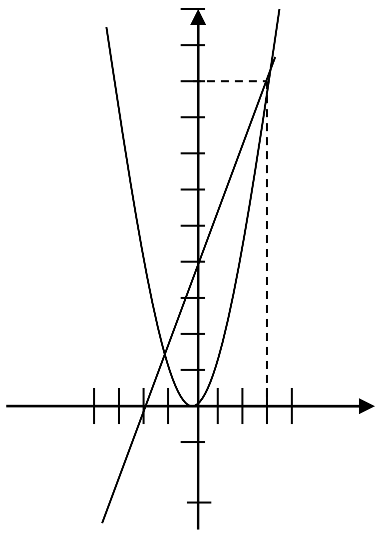
$y = 2x + 3$. Сделать чөртеж.

Находим точки пересечения параболы и прямой.

$$x^2 = 2x + 3$$
$$x^2 - 2x - 3 = 0$$
$$x_1 = -1;\ x_2 = 3$$

Точки пересечения $M_1(-1;\ 1)$; $M_2(3;9)$.

$$S = \int_{-1}^{3}\left(2x + 3 - x^2\right)dx = 2\int_{-1}^{3} xdx + 3\int_{-1}^{3} dx - \int_{-1}^{3} x^2dx = x^2\Big|_{-1}^{3} + 3x\Big|_{-1}^{3} - \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{3} =$$
$$= (9-1) + 3(3+1) - \frac{1}{3}(27+1) = 8 + 12 - \frac{28}{3} = \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3}; \quad S = 10\frac{2}{3}\,см^2.$$



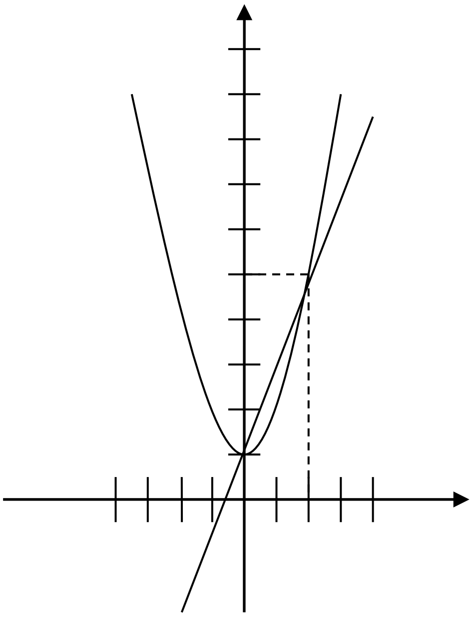
№2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 + 1$ и прямой

$y = 2x + 1$. Сделать чөртеж.

Находим точки пересечения параболы и прямой.

$$x^2+1=2x+1;$$
$$x^2+1-2x-1=0$$
$$x^2-2x=0$$
$$x(x-2)=0$$
$$x_1=0;\ x_2=2.$$

Точки пересечения $M_1(0;\,1);\quad M_2(2;5).$



$$S=\int_0^2(2x+1-x^2-1)dx=2\int_0^2 xdx-\int_0^2 x^2dx=2x^2\Big|_0^2-\frac{1}{3}x^3\Big|_0^2=2(4-0)-\frac{1}{3}(8-0)=$$
$$=8-\frac{8}{3}=\frac{16}{3}=5\frac{1}{3};\qquad S=5\frac{1}{3}см^2.$$

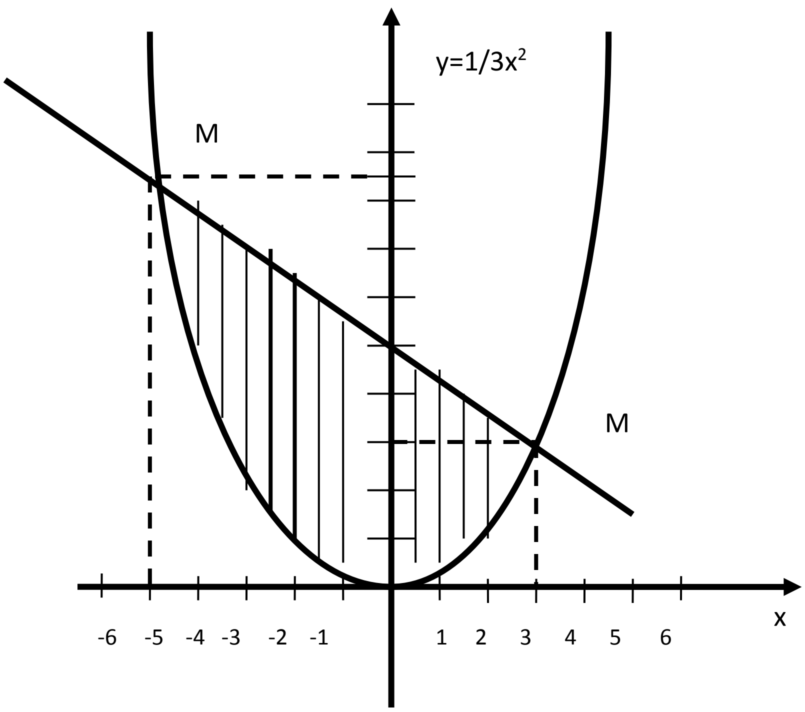
№3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y=\frac{1}{3}x^2$ и прямой $y=5-\frac{2}{3}x.$ Сделать чөртеж.

Находим точки пересечение параболы и прямой.

$$\frac{1}{3}x^2=5-\frac{2}{3}x$$
$$x^2+2x-15=0$$
$$x_1=-5;\quad x_2=3$$

Точки пересечения $M_1\left(5;\ \dfrac{25}{3}\right);\quad M_2(3;3).$

$$S=\int_{-5}^{3}(5-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}x^2)dx=5x\Big|_{-5}^{3}-\frac{1}{3}x^2\Bigg|_{-5}^{3}-\frac{1}{9}x^3\Bigg|=5(3+5)+\frac{1}{3}(9-25)-\frac{1}{9}(27+125)=$$
$$=40-\frac{16}{3}-\frac{152}{9}=\frac{360-48-152}{9}=\frac{160}{9}=17\frac{7}{9};\qquad S=17\frac{7}{9}см^2.$$



№4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y=x^2$ и прямимы $x=1;\ x=3$.

Находим точки пересечения параболы и прямых.

$x=1;\ \ y=1;$
$x=3;\ \ y=9;$

Точки пересечения $M_1(1;\ 1);\quad M_2(3;9).$

$$s=\int_{1}^{3}x^2dx=\frac{x^3}{3}\Bigg|_{1}^{3}=\frac{1}{3}(27-1)=\frac{26}{3};\quad S=8\frac{2}{3}см^2.$$

№5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y=1-x^2$ и прямой

$2x-y-2=0$. Сделать чөртеж.

Находим точки пересечения параболы и прямой.

$$1-x^2=2x-2$$
$$x^2+2x-3=0$$
$$x_1=1;\ x_2=-3$$

Точки пересечения $M_1(1;\ 0)$; $M_2(-3;-8)$.

$$S=\int_{-3}^{1}(1-x^2-2x+2)dx=\int_{-3}^{1}(3-2x-x^2)dx=3\int_{-3}^{1}dx-2\int_{-3}^{1}xdx-\int_{-3}^{1}x^2dx=$$
$$=3x\Big|_{-3}^{1}-x^2\Big|_{-3}^{1}-\frac{1}{3}x^3\Big|_{-3}^{1}=3(1+3)-(1-9)-\frac{1}{3}(1+27)=12+8-\frac{28}{3}=\frac{32}{3}=10\frac{2}{3};\quad S=10\frac{2}{3}\,см^2.$$

№6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y=x^2$ и прямой $y=2x$. Сделать чөртеж.

Находим точки пересечения параболы и прямой.

$$x^2=2x$$
$$x^2-2x=0$$
$$x(x-2)=0$$
$$x_1=0;\ x_2=2;$$

Точки пересечения $M_1(0;\ 0)$; $M_2(2;4)$.

$$S=\int_{0}^{2}(2x-x^2)dx=2\int_{0}^{2}xdx-\int_{0}^{2}x^2dx=x^2\Big|_0^2-\frac{1}{3}x^3\Big|_0^2=4-\frac{1}{3}\cdot 8=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3};\quad S=1\frac{1}{3}\,см^2.$$

№7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y=x^2-2$ и прямой

$y=x-2$. Сделать чөртеж.

Находим точки пересечения параболы и прямой.

$x^2-2=x-2;\quad x^2-x=0;\quad x(x-1)=0;\quad x_1=0;\ x_2=1;$

Точки пересечения $M_1(0;\ -2)$; $M_2(1;-1)$.

$$S=\int_0^1 (x-2-x^2+2)dx=\int_0^1 xdx-\int_0^1 x^2dx = x^2\Big|_0^1-\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1=1-\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{2}{3}=\frac{2}{3};\ S=\frac{2}{3}см^2.$$

№8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y=x^2+2$ и прямой

$y=2x+2$. Сделать чөртеж.

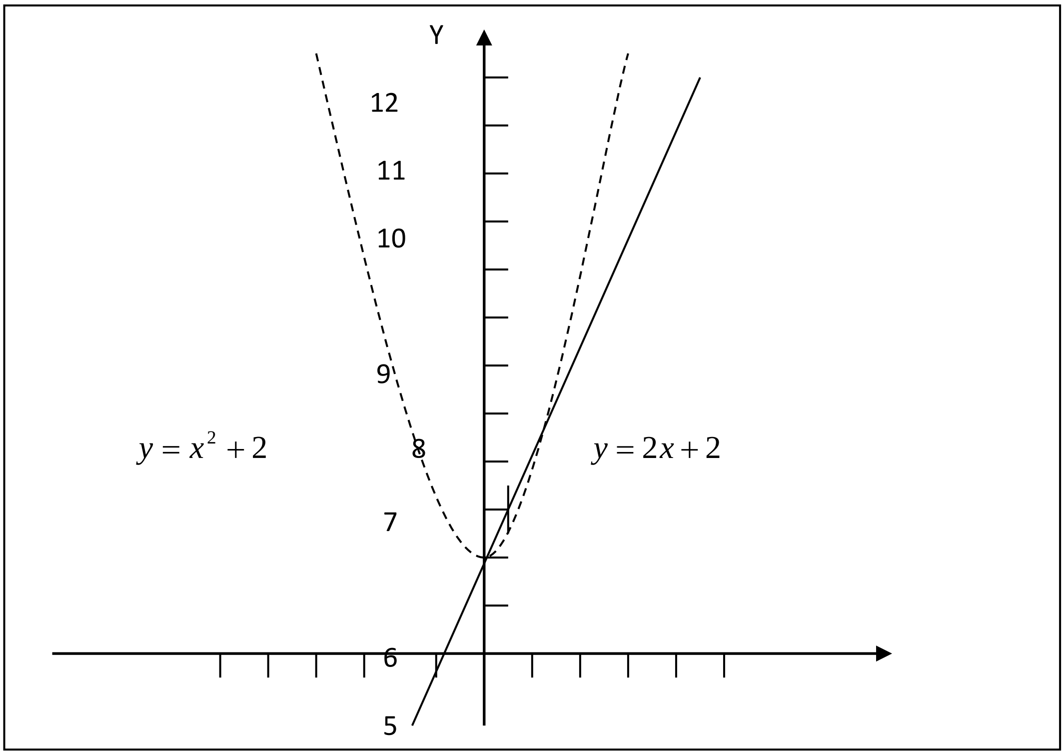
Находим точки пересечения параболы и прямой.

$$x^2+2=2x+2$$
$$x^2-2x=0$$
$$x(x-2)=0$$
$$x_1=0 \quad x_2=2$$

Точки пересечения $M_1(0;\ 2)$; $M_2(2;6)$.

$$S=\int_0^2 (2x+2-x^2-2)dx=2\int_0^2 xdx-\int_0^2 x^2dx=2x^2\Big|_0^2-\frac{1}{3}x^3\Big|_0^2=8-\frac{1}{3}\cdot 8=\frac{16}{3}=5\frac{1}{3};$$

$$S=5\frac{1}{3}см^2.$$



№9.Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2$ и прямой $y = 2x + 3$

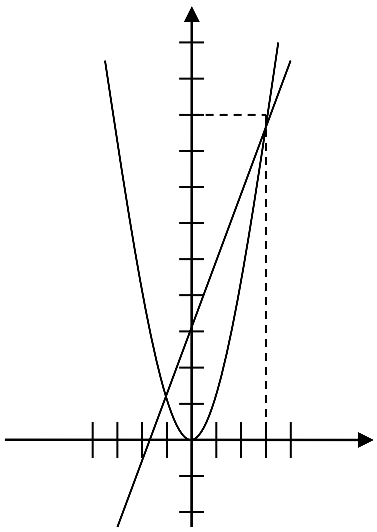
Сделать чөртеж.

Находим точки пересечения параболы с прямой.

$$x^2 = 2x + 3$$
$$x^2 - 2x - 3 = 0$$
$$x_1 = -1; \quad x_2 = 3;$$

Точки пересечения $M_1(-1;\ 1); \quad M_2(3;9).$

$$S = \int_{-1}^{3}\left(2x + 3 - x^2\right)dx = 2\int_{-1}^{3} xdx + 3\int_{-1}^{3} dx - \int_{-1}^{3} x^2dx = x^2\Big|_{-1}^{3} + 3x\Big|_{-1}^{3} - \frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{3} =$$
$$= (9-1) + 3(3+1) - \frac{1}{3}(9+1) = 8 + 12 - \frac{10}{3} = \frac{50}{3} = 16\frac{2}{3}; \qquad S = 16\frac{2}{3}см^2.$$



№10. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2$ и прямой $y = 3 - 2x$. Сделать чөртеж.

Находим точки пересечения параболы и прямой.

$$x^2 = 3 - 2x; \quad x^2 + 2x - 3 = 0; \quad x_1 = -3; \quad x_2 = 1;$$

Точки пересечения $M_1(-3;\ 9); \quad M_2(1;1).$

$$S = \int_{-3}^{1}\left(3 - 2x - x^2\right)dx = 3\int_{-3}^{1} dx - 2\int_{-3}^{1} xdx - \int_{-3}^{1} x^2dx = 3x\Big|_{-3}^{1} - x^2\Big|_{-3}^{1} - \frac{1}{3}x^3\Big|_{-3}^{1} = 12 + 8 - \frac{28}{3} = \frac{32}{3}; \quad S = 10\frac{2}{3}\ см^2.$$

11. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2$ и прямой $y = 2 - x$.

Сделать чөртеж.

Находим точки пересечения параболы и прямой.

$x^2 = 2 - x; \quad x^2 + x - 2 = 0; \ x_1 = -2, \ x_2 = 1$

Точки пересечения $M_1(-2;\ 4)$; $M_2(1;1)$.

$$S = \int_{-2}^{1}(2 - x - x^2)dx = 2\int_{-2}^{1}dx - \int_{-2}^{1}xdx - \int_{-2}^{1}x^2dx = 2x\Big|_{-2}^{1} - \frac{1}{2}x^2\Big|_{-2}^{1} - \frac{1}{3}x^3\Big|_{-2}^{1} =$$

$$= 2(1+2) - \frac{1}{2}(1-4) - \frac{1}{3}(1+8) = 6 + \frac{3}{2} - 3 = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}; \quad S = 4\frac{1}{2}см^2.$$

№12. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 + 1$ и прямой

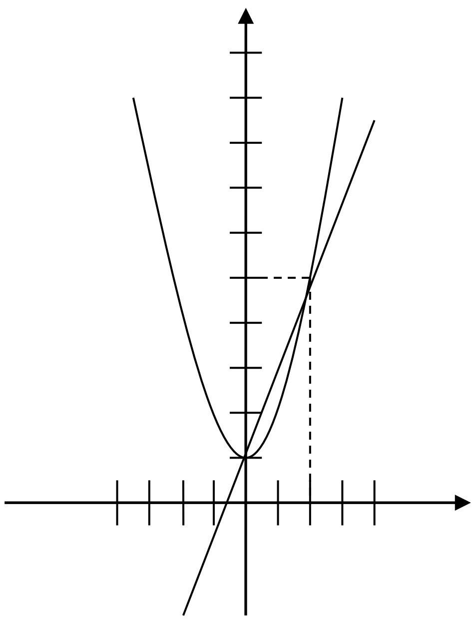
$y = 2x + 1$. Сделать чертөж.

Находим точки пересечения данных фигур.

$x^2 + 1 = 2x + 1; \ x^2 - 2x = 0; \ x(x-2) = 0; \ x_1 = 0; \ x_2 = 2;$

Точки пересечения $M_1(0;\ 1)$; $M_2(2;5)$.

$$S = \int_{0}^{2}(2x + 1 - x^2 - 1)dx = 2\int_{0}^{2}xdx - \int_{0}^{2}x^2dx = x^2\Big|_{0}^{2} - \frac{1}{3}x^3\Big|_{0}^{2} = 4 - \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}; \ S = 2\frac{2}{3}см^2.$$



«Анык эмес интеграл» жана «Анык интеграл жана анын колдонуштары» бөлүмдөрү боюнча өз алдынча иштердин топтому.

Сборник самостоятельных работ ***по разделам: «Неопределенный интеграл» и «Определенный интеграл и ее применение».***

1-тапшырма
1 – задание

№1-30. Анык эмес интегралдарды тапкыла жана жыйынтыгын дифференцирлөө аркылуу текшергиле.

№1-30. Найти неопределенные интегралы. Результаты проверить дифференцированием.

1. $a)\ \int \frac{dx}{x\ln^4 x}$ $\quad b)\ \int x^2 3^{2x} dx$ $\quad c)\int \frac{4x+5}{x^2+3x-4}dx$ $\quad d)\ \int (x^2+5)dx$

2. $a)\ \int \frac{3x+1}{x^2+9}dx$ $\quad b)\ \int arctgxdx$ $\quad c)\int \frac{7x+22}{x^2+4x-5}dx$ $\quad d)\ \int \frac{dx}{x+5}$

3. $a)\ \int \frac{dx}{\arccos x\sqrt{1-x^2}}$ $\quad b)\ \int x\sin 3xdx$ $\quad c)\int \frac{x+1}{1-2x+x^2}dx$ $\quad d)\ \int \frac{dx}{\sqrt{x}+1}$

4. $a)\ \int \frac{dx}{\arcsin^2 x\sqrt{1-x^2}}$ $\quad b)\ \int \frac{\ln x}{x^2}dx$ $\quad c)\int \frac{x^3+1}{x^2-3x+2}dx$ $\quad d)\ \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

5. $a)\ \int \frac{\cos xdx}{\sqrt{1+5\sin x}}$ $\quad b)\ \int \frac{xdx}{\cos^2 x}$ $\quad c)\int \frac{dx}{3x^2+8x-2}$ $\quad d)\ \int (5x^2+3x-6)dx$

6. $a)\ \int \frac{e^{-\frac{1}{x}}dx}{4x^2}$ $\quad b)\ \int x^2 4^x dx$ $\quad c)\int \frac{4x+5}{3x^2+x-4}dx$ $\quad d)\ \int (\sqrt{x}+5)dx$

7. $a)\ \int \frac{e^x dx}{4+e^{2x}}$ $\quad b)\ \int \frac{xarctgx}{1+x^2}dx$ $\quad c)\int \frac{x^2+4x^2-5}{x^2+3x-4}dx$ $\quad d)\ \int (\sqrt[3]{x}-\sqrt{x})dx$

8. $a)\ \int \frac{e^{\sqrt{x}}dx}{4\sqrt{x}}$ $\quad b)\ \int \ln(x^2+1)dx$ $\quad c)\int \frac{x^3+1}{x^3+8}dx$ $\quad d)\ \int (x-1)^2 dx$

9. $a)\ \int \frac{\cos xdx}{\sqrt{4-\sin 2x}}$ $\quad b)\ \int x5^x dx$ $\quad c)\int \frac{4x+7}{3x^2+x-4}dx$ $\quad d)\ \int tgxdx$

10. $a)\ \int \frac{\sqrt[4]{1-x^2}\,x}{5}dx$ $b)\ \int \frac{x}{e^x}dx$ $c)\int \frac{x^3+5}{x^2-2x-3}dx$ $d)\ \int ctgx dx$

11. $a)\ \int \frac{e^{2x}}{e^x-1}dx$ $b)\ \int x\ln(x-1)dx$ $c)\int \frac{3x-11}{x^2+8x+18}dx$ $d)\ \int \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx$

12. $a)\ \int \frac{\sqrt{1-\ln x}}{x}dx$ $b)\ \int xe^{-3x}dx$ $c)\int \frac{x^2+1}{x^3+1}dx$ $d)\ \int \sqrt{x-5}dx$

13. $a)\ \int \sqrt{2x-3\cos x}\sin x dx$ $b)\ \int x^2\ln x dx$ $c)\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+8x+6}}$ $d)\ \int (5-2x+x^2)dx$

14. $a)\ \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$ $b)\ \int \frac{xacr\sin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ $c)\int \frac{1-x^4}{1+x^2}dx$ $d)\ \int 10^x dx$

15. $a)\ \int \frac{d(\arcsin x)}{\arcsin x}$ $b)\ \int \frac{x}{(1-x)^3}dx$ $c)\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$ $d)\ \int \frac{\ln^3 x}{x^2}dx$

16. $a)\ \int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}dx$ $b)\ \int e^{\sqrt{x}}dx$ $c)\int \frac{2x^5-3x^2}{1+3x^3-6x}dx$ $d)\ \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2}dx$

17. $a)\ \int \frac{x^2}{x^3+1}dx$ $b)\ \int x\sin x dx$ $c)\int \cos^2 x dx$ $d)\ \int \frac{dx}{x(x-1)}$

18. $a)\ \int \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}}$ $b)\ \int \cos^3 x dx$ $c)\int \frac{x}{x+4}dx$ $d)\ \int x3^x dx$

19. $a)\ \int \frac{\sin^3 x}{\cos x}dx$ $b)\ \int \frac{dx}{4x^2+4x+5}$ $c)\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ $d)\ \int xarctgx dx$

20. $a)\ \int \frac{xarctgx}{\sqrt{1+x^2}}dx$ $b)\ \int \frac{dx}{\sin^4 x}$ $c)\int \frac{3x-1}{x^2}dx$ $d)\ \int \frac{\cos x}{b^2+\sin^2 x}dx$

21. $a)\ \int x^2\ln|x+1|dx$ $b)\ \int \sin^5 x dx$ $c)\ \int \frac{x}{2x+1}dx$ $d)\ \int \frac{dx}{2x^2+9}$

22. $a)\ \int x^2 a^x dx$ $b)\ \int (e^x+1)^3 dx$ $c)\ \int \frac{e^{2x}-1}{e^x}dx$ $d)\ \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$

23. $a)\ \int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx$ $b)\ \int \ln^2 x dx$ $c)\ \int \frac{3+x}{3-x}dx$ $d)\ \int \frac{dx}{(x+1)(2x-3)}$

24. $a)\ \int x\sin x\cos x dx$ $b)\ \int \cos 3x dx$ $c)\ \int \frac{dx}{x-x^2-25}$ $d)\ \int \frac{x^2-1}{x^2+1}dx$

25. $a)\ \int \frac{\sqrt{2-x^2}+\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{4-x^4}}dx$ $b)\ \int e^{2x}\cos x dx$ $c)\ \int \frac{4x-3}{x^2+3x+4}dx$ $d)\ \int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx$

26. $a)\ \int (1-2x)dx$ $b)\ \int x^2 4x dx$ $c)\ \int \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{4x^2}dx$ $d)\ \int \frac{2x-1}{3x^2-3x+2}dx$

27. $a)\ \int \cos(x^2-1)x dx$ $b)\ \int \frac{\ln x}{x^5}dx$ $c)\ \int \frac{2x^4+1}{x^3+x^2+2x+2}dx$ $d)\ \int \frac{dx}{2\sqrt{x}}$

28. $a)\ \int \frac{\sin 2x}{\sqrt{2+\cos^2 x}}dx$ $b)\ \int (x^2+1)e^x dx$ $c)\ \int x\sqrt{1-x^2}dx$ $d)\ \int \frac{x-3}{x^2-9x+23}dx$

29. $a)\ \int tg^2 x dx$ $b)\ \int \frac{x^4}{1-x}dx$ $c)\ \int arctg\sqrt{x}dx$ $d)\ \int \frac{1+\sin x}{1-\sin x}dx$

30. $a)\ \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ $b)\ \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$ $c)\ \int \frac{x^3-2x+4}{x^2+2x-3}dx$ $d)\ \int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$

2-тапшырма
2 - задание

№1-30. Ньютон-Лейбництин формуласы менен анык интегралды эсептегиле.

№1-30. Вычислить по формуле Ньютона-Лейбница определенной интеграл.

1. $\int_{2}^{3}\frac{dx}{x^2+2x+5}$ 2. $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{9-8x}$ 3. $\int_{1}^{4}\frac{dx}{x\sqrt{x}}$ 4. $\int_{1}^{e}\frac{\ln x}{x}dx$ 5. $\int_{0}^{4}\frac{dx}{\sqrt{x+9}}$

6. $\int_{0}^{4}\frac{xdx}{\sqrt{x^2+9}}$ 7. $\int_{-7}^{3}x\sqrt{x^2+1}\,dx$ 8. $\int_{1}^{3}\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$ 9. $\int_{0}^{3}x^2\sqrt{2+x^3}\,dx$ 10. $\int_{2}^{7}\frac{dx}{x^2+2x+2}$

11. $\int_{-6}^{4}x\sqrt{x^2+1}\,dx$ 12. $\int_{1}^{5}\frac{2\ln x}{x}dx$ 13. $\int_{0}^{10}\frac{dx}{\sqrt{19x+8}}$ 14. $\int_{0}^{2}\sqrt{2+x}\,dx$ 15. $\int_{2}^{4}x^3\sqrt{x}dx$

16. $\int_{2}^{5}\frac{xdx}{x^2-1}$ 17. $\int_{0}^{2}x\sqrt{x^3+1}\,dx$ 18. $\int_{2}^{7}\frac{dx}{x^2+2x-3}$ 19. $\int_{1}^{e}\frac{dx}{x\sqrt{1-\ln x}}$ 20. $\int_{4}^{9}\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-1}$

21. $\int_{0}^{\pi/2}\sin\left(\frac{2\pi x}{T}-\varphi_0\right)dx$ 22. $\int_{0}^{1}\frac{xdx}{\left(x^2+1\right)^2}$ 23. $\int_{1}^{3}\frac{e^{\frac{1}{x}}dx}{x^2}$ 24. $\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{(11+5x)^3}$

25. $\int_{0}^{1}\left(e^x-1\right)^4e^xdx$ 26. $\int_{1}^{e^3}\frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$ 27. $\int_{0}^{2a}\frac{3dx}{2b-x}$ 28. $\int_{0}^{16}\frac{dx}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}}$

29. $\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^2+4x+5}$ 30. $\int_{1}^{2}\frac{dx}{x+x^2}$

3-*тапшырма*
3 - задание

№1-30. Төмөнкү сызыктар менен чектелген фигуранын аянтын эсепегиле жана чиймесин чийгиле.

№1-30. Вычислить площадь фигуры ограниченной линиями, сделать чертеж.

1. $y^2 = 8x; \quad x = \frac{3}{2}.$ 2. $y = x^3; \quad y = x.$ 3. $xy = 6; \quad y = 7 - x.$

4. $y = x^2 + 4x; \quad x - y + 4 = 0.$ 5. $y = x^2; \quad y + x = 2.$ 6. $5y + x^2 = 0; \quad y = -5.$

7. $y = 2x^2 + 1; \quad 2x - y + 1 = 0.$ 8. $xy = 8; \quad 4x + 3y - 28 = 0.$ 9. $y = x^2 + 2; \quad 2x - y + 2 = 0.$

10. $y = 8x + x^2; \quad y - x = 3.$ 11. $3y = x^2; \quad y = x.$ 12. $y = -x^2 + 4x - 3; \quad y = 0.$

13. $y = x^3; \quad y = 2x; \quad y = x.$ 14. $y = x^2; \quad xy = 8; \quad x = 6.$ 15. $y = x^2 - 2x; \quad y - 3 = 0.$

16. $y = x^3; \quad y = 2; \quad x = 0.$ 17. $5y + x^2 = 0; \quad y = x.$ 18. $y = x^2; \quad y = \frac{x^3}{3}.$

19. $yx = 6; \quad y = 7 - x.$ 20. $y = x^2 + 4x; \quad x - y + 4 = 0.$ 21. $y^2 = 2x + 1; \quad y - x - 1 = 0.$

22. $y = -x^2 + 4x + 6; \quad y = x^2.$ 23. $y = \sqrt{x}; \quad y = \frac{x^3}{3}.$ 24. $y^2 + 8x = 16; \quad y = \frac{x^3}{3}.$

25. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1; \quad \frac{x^2}{2} - y^2 = 1.$ 26. $y = \frac{1}{1 + x^2}; \quad y = \frac{x^2}{2}.$ 27. $y^2 = 6x; \quad x^2 + y^2 = 16.$

28. $y^2 = 2x + 1; \quad x - y - 1 = 0.$ 29. $y^2 = 6x; \quad y^2 + x^2 = 16.$ 30. $x^2 + y^2 = a^2; \quad x^2 - 2y^2 = \frac{a^2}{4}.$

Математик эмес адистиктердин студенттери үчүн «Анык эмес интеграл» жана ***«Анык интеграл жана анын колдонуштары»*** бөлүмдөрү боюнча өз алдынча иштердин топтому.

Сборник самостоятельных работ ***для студентов не математических специальностей*** по разделам: ***«Неопределенный интеграл» и «Определенный интеграл и ее применение»***

1-тапшырма
1 – задание

№ 1-25. Берилген анык эмес интегралды тапкыла.

№ 1-25. Найти неопределенные интервалы.

1. а) $\int\left(3-4e^{2x}+x^{3}\right)dx$; б) $\int\frac{\sqrt[3]{x}-3}{\sqrt{x}}dx$; в) $\int\frac{dx}{\sqrt{5x-3}}$

2. а) $\int\left(3x^{5}-\sin x+4\right)dx$; б) $\int\frac{x+4}{\sqrt{x}}dx$; в) $\int\cos 3x dx$

3. а) $\int\left(8x^{7}+\cos x+5\right)dx$; б) $\int\frac{5-\sqrt[4]{x^{3}}}{x}dx$; в) $\int\sqrt[3]{\left(3x^{2}-1\right)^{2}}dx$

4. а) $\int\left(8-\frac{1}{2\cos^{2}x}+x^{3}\right)dx$; б) $\int\frac{x-2}{\sqrt[3]{x^{2}}}dx$; в) $\int\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)dx$

5. а) $\int\left(x^{5}-\frac{1}{2x}-4\right)dx$; б) $\int\frac{x-2}{\sqrt[3]{x^{2}}}dx$; в) $\int\frac{\cos x}{4+3\sin x}dx$

6. а) $\int\left(3-\frac{1}{3\sin^{2}x}-4\right)dx$; б) $\int\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}}dx$; в) $\int\frac{x}{x^{2}+1}dx$

7. а) $\int\left(3x^{2}-\frac{2}{1+x^{2}}-5\right)dx$; б) $\int\frac{5+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^{2}}}dx$; в) $\int tg 2x dx$

8. а) $\int\left(x-\frac{1}{3\sqrt{1-x^{2}}}+2\right)dx$; б) $\int\frac{x-2}{\sqrt[4]{x^{3}}}dx$; в) $\int x\cdot 2^{x^{2}}dx$

9. а) $\int\left(2\cos x-5x^{4}+3\right)dx$; б) $\int\frac{4+x}{\sqrt{x}}dx$; в) $\int\frac{xdx}{\left(x^{2}+5\right)^{4}}$

10. а) $\int\left(5e^{x}-x^{3}-4\right)dx$; б) $\int\frac{x-5}{\sqrt[4]{x}}dx$; в) $\int\sqrt[5]{\left(2x^{3}-4\right)^{3}}x^{2}dx$

11. а) $\int \left(3\sin x + 4x^3 - 1\right)dx$; б) $\int \frac{2-\sqrt[3]{x}}{x\cdot\sqrt[3]{x}}dx$; в) $\int \cos^4 x \sin x dx$

12. а) $\int \left(5 - \frac{3}{\cos^2 x} + 2x^3\right)dx$; б) $\int \frac{x-5}{x^2}dx$; в) $\int e^{\cos x}\sin x dx$

13. а) $\int \left(2 - \frac{x}{3} + \frac{5}{1+x^2}\right)dx$; б) $\int \frac{2-\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}dx$; в) $\int \frac{e^x}{3+e^x}dx$

14. а) $\int \left(5x^4 - \frac{1}{3x} - 4\right)dx$; б) $\int \frac{x\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}}dx$; в) $\int \frac{xdx}{\sqrt{2x^2-5}}$

15. а) $\int \left(2 - \frac{x}{5} + \frac{5}{x}\right)dx$; б) $\int \frac{3-\sqrt[4]{x}}{x}dx$; в) $\int \frac{x3dx}{\sqrt[5]{5-2x^3}}$

16. а) $\int \left(10x^4 - \frac{1}{2\sin^2 x} - 2\right)dx$; б) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x^2}}dx$; в) $\int 3^{x^2} xdx$

17. а) $\int \left(2\cos x - 3x^2 - 3\right)dx$; б) $\int \frac{5-\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}dx$; в) $\int ctg3xdx$

18. а) $\int \left(\frac{1}{5\cos^2 x} - \frac{x}{2} + \frac{2}{x}\right)dx$; б) $\int \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt[3]{x}}dx$; в) $\int \sqrt[4]{(2-\sin x)^3}\cos xdx$

19. а) $\int \left(x^7 - 3\sin x + 2\right)dx$; б) $\int \frac{2-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}dx$; в) $\int \sqrt{2\sin x + 1}\cos xdx$

20. а) $\int \left(9x - 3e^{3x} + 7\right)dx$; б) $\int \frac{8-x^3}{\sqrt{x}}dx$; в) $\int \frac{\cos x}{1-3\sin x}dx$

21. а) $\int \left(6 - \frac{x^3}{2} - 3\cos x\right)dx$; б) $\int \frac{3+x}{x\sqrt{x}}dx$; в) $\int \frac{x^2dx}{5-2x^3}$

22. а) $\int \left(\frac{x}{3} - \frac{3}{x} + 5e^{5x}\right)dx$; б) $\int \frac{x^4-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx$; в) $\int (3x^3-4)^4 x^2dx$

23. а) $\int \left(\frac{1}{\sqrt[2]{1-x^2}} + 4\right)dx$; б) $\int \frac{3\ \ -\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}dx$; в) $\int \frac{x^4dx}{\sqrt[4]{2x^5+4}}$

24. а) $\int \left(3 - \frac{1}{4\sin^2 x} - x^7\right)dx$; б) $\int \frac{4-x^2}{\sqrt[4]{x}}dx$; в) $\int \frac{\cos xdx}{4\sin x + 3}$

25. а) $\int \left(6^x - 4\sin x + 5\right)dx$; б) $\int \frac{\sqrt{x}-x}{x^2}dx$; в) $\int \frac{\sin xdx}{(3\cos x + 9)^2}$

2-тапшырма
2 – задание

№ 1-25. Берилген анык интегралды эсептегиле.

№ 1-25. Вычислить определенные интегралы.

1. а) $\int_0^2 (2-x)^2 dx$; б) $\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{x^4+16}\,x^3 dx$;

2. а) $\int_0^1 2\sin x dx$; б) $\int_2^4 \frac{xdx}{\left(x^2-1\right)^3}$;

3. а) $\int_0^4 \left(2\sqrt{x}-x^2\right)dx$; б) $\int_2^{\pi/2} \frac{\cos xdx}{(3-\sin x)^2}$;

4. а) $\int_1^2 \frac{2x^2+1}{x}dx$; б) $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{8-7x^3}}$;

5. а) $\int_{-1}^2 \left(5-x-3x^2\right)dx$; б) $\int_0^2 \frac{xdx}{\sqrt{x^2+4}}$;

6. а) $\int_0^{\pi/4} \sqrt{2}\cos xdx$; б) $\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{25-3x^2}\,dx$;

7. а) $\int_1^8 \left(3-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$; б) $\int_0^1 x^2 e^{x^3+1} dx$;

8. а) $\int_1^2 \left(\frac{x-1}{x^3}\right)dx$; б) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos xdx}{\sqrt[3]{(8-7\sin x)^2}}$;

9. а) $\int_{-1}^1 \left(x^2-1\right)dx$; б) $\int_1^2 \frac{xdx}{\left(2x^2+4\right)^4}$

10. а) $\int_0^1 \left(e^x+x\right)dx$; б) $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin}\cos xdx$

11. а) $\int_1^4 \left(2+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$; б) $\int_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{9+2x^3}}$

12. а) $\int_{-2}^2 (1+x)^2 dx$; б) $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{9-5x^2}}$

13. а) $\int_1^8 \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}}dx$; б) $\int_0^1 \left(2-x^3\right)^4 x^2 dx$

14. а) $\int_2^1 \left(1-\sqrt[3]{x^2}\right)dx$; б) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{(1+2\cos x)^4}$

15. а) $\int_2^3 \frac{1+x^5}{x^4}dx$; б) $\int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx$

16. а) $\int_{-1}^0 \left(x^3+2x\right)dx$; б) $\int_0^{\pi/2} (3-2\sin x)^3 \cos x dx$

17. а) $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{2\cos^2 x}$; б) $\int_0^4 x^3\sqrt{x^4+9}dx$;

18. а) $\int_0^{16} \left(\sqrt{x}-2\right)dx$; б) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{2\sin x+1}dx$;

19. а) $\int_1^2 \frac{1+x^6}{x^5}dx$; б) $\int_0^1 \left(3-4x^3\right)x^2 dx$;

20. а) $\int_1^8 \left(1-3\sqrt[3]{x^2}\right)dx$; б) $\int_0^{\pi/2} \sqrt{5-4\sin x}\cos x dx$;

21. а) $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{3\sin^2 x}$; б) $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{4x^3+3}}$;

22. а) $\int_1^4 \left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$; б) $\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt[4]{\left(1+3x^2\right)^3}}$;

23. а) $\int_0^1 \frac{1-x^7}{x^6}dx$; б) $\int_{-1}^2 \frac{x dx}{\left(4-x^2\right)^3}$;

24. а) $\int_0^4 \left(1-\sqrt{x}\right)^2 dx$; б) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{(2-\cos x)^2}$;

25. а) $\int_0^{\pi/2} (\cos x-\sin x)dx$; б) $\int_0^2 \frac{x dx}{\sqrt{25-4x^2}}$;

3-тапшырма
3 - задание

№ 1-25. Төмөнкү сызыктар менен чектелген фигуранын аянтын эсепегиле жана чиймесин чийгиле.

№ 1-25. Вычислить площадь фигуры ограниченной линиями, сделать чертеж.

1. $y = 8x - x^2 - 7; \quad y = 0.$ 2. $y = x^3 - 1; \quad y = 0.$ 3. $y = x^2 - 3x - 4; \quad y = 0.$

4. $y^2 = 4x; \quad x = 4y.$ 5. $y = 5x^2 - 2x + 1; \quad y = 0.$ 6. $y = x^3; \quad y = x^2; \quad x = -1; \quad x = 0.$

7. $y = x^2 - 6x + 8; \quad y = 0.$ 8. $y = x^2; \quad y = x + 2.$ 9. $y = x^2 - 4x - 5; \quad y = 0.$

10. $y = 6x - x^2; \quad y = 0.$ 11. $y = x^2 + 2; \quad y = 2x + 2.$ 12. $xy = 1; \quad x = 2; \quad x = 3; \quad y = 0.$

13. $y = x^3; \quad y = 0; \quad x = 0; \quad x = 2.$ 14. $y^2 = 3x; \quad y = 0; \quad x = 0; \quad x = 3.$

15. $y = \frac{1}{3}x^2; \quad y = 0; \quad x = 0; \quad x = 3.$ 16. $y = x^2 + 1; \quad y = 2; \quad y = 5.$

17. $y = 3 - \frac{1}{3}x^2; \quad y = 0; \quad y = 3;$ 18. $y^2 = x; \quad x = 3.$ 19. $y = 4x - x^2; \quad y = 3.$

20. $y = 6x - x^2; \quad y = 5.$ 21. $y = x^2 + 1; \quad x = -1; \quad x = 2; \quad y = 0.$

22. $x - 2y - 8 = 0; \quad y = 1; \quad x = 3; \quad x = 0;$ 23. $y = 3 - x^2 - 2x; \quad y = 0; \quad x = 0; \quad x = 2.$

24. $y = 1 + 4x - x^2; \quad y = x + 1;$ 25. $y = 3x - x^2; \quad 5x - y - 8 = 0.$

Колдонулган адабияттар:

1. Борубаев А., Шабыкеев Б. ж.б., «Математикалык анализ» 1-2 бөлүм. –Б: 2009.
2. Усубакунов Р. «Дифференциалдык жана интегралдык эсептөөлөр»
3. Исаков А. «Аналитикалык геометрия», – Ф: 1986.
4. Саттаров Ж. «Алгебра жана сандар теориясы» I-II бөлүм. – Ош: 1991.
5. Сулайманов Ж. «Жогорку математика сабагынан лекциялар жайнагы» –Б:1993.
6. Матиева Г. «Аналитикалык геометрия», – Ош:1994.
7. Толбаев Б. «Тегиздиктеги аналитикалык геометрия боюнча усулдук колдонмо» – Сүлүктү: 2003.
8. Соловников А. «Математика в экономике» – Москва: «Фин и стат» 2000.
9. Бекельман И.Я. «Аналитическая геометрия и линейная алгебра» – Москва: «Просвещение» 1986.
10. Баврин И.И. «Высшая математика» – Москва: «Просвещение» 1980.
11. Романко В.К. «Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления» – Москва: Физматлит 2001.
12. Красс М.С. «Математика для экономистов» – С-П: «Питер» 2007.
13. Смирнов В.И. «Курс высшей математики» т.1-4 .–Москва: «Наука» 1974.
14. Пискунов Н.С., «Дифференциальное и интегральное исчисления» т.I,II, –Москва: «Наука» 1965.
15. Фихтенгольц Г. «Основы математического анализа», т.I,II,III, –М: «Наука» 1968.
16. Толубаев Ж.О., Кудаяров К.С., «Математика боюнча мисалдар жана маселелер жыйнагы» –Бишкек: «Турар» 2005.
17. Т.Б.Борубаев, Ж.О.Толубаев «Сборник задач по высшей математике» –Жалал-Абад: 1995.
18. Берман Г.Н., «Сборник задач по курсу математического анализа», –М: «Наука» 1964.
19. Демидович Б.П. «Сборник задач и упражнений по математическому анализу» –Москва: Госиздат, 1964.
20. Гмурман В.Е. «Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике» – Москва: «Высшая школа» 1989.
21. Данко П.Е. Попов А.Т., и.др. «Высшая математика в упражнениях и задачах»1-2 часть –Москва: «Высшая школа»1999.
22. Минорский В., «Сборник задач по высшей математике» – Москва М: «Физ. мат литература» 2002.
23. Садовничий В, «Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре» – Москва: «Логос» 2005.
24. Клетеник Д.В. «Сборник задач по аналитической геометрии» – Москва: «Наука» 1986.
25. Проскуряков В.«Сборник задач по линейной алгебре» – Москва: «Наука» 1970.

М А З М У Н У

Ж.О.Толубаев, А.М.Исмаилова

БИР АРГУМЕНТТҮҮ ФУНКЦИЯНЫН
ИНТЕГРАЛДЫК ЭСЕПТӨӨЛӨРҮ БОЮНЧА
ӨЗ АЛДЫНЧА ИШТЕРДИН ЖЫЙНАГЫ
(Өз алдынча иштерди аткарууга усулдук көрсөтмөлөр)

СБОРНИК САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ РАБОТ
ПО ИНТЕГРАЛНОМУ ИСЧИСЛЕНИЮ
ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ
(Методическое руководство
к выполнению самостоятельных работ)

Нускасы 300 экз. Ченеми 60х84/16. Көлөмү 3.5 басма табак.

“Айат” басмаканасында басылды.
Бишкек ш.Ташкен к., 60